ZEITSCHRIFT

FÜR

PHYSIK

UND

MATHEMATIK.

Herausgeber:

A. Baumgartner und A. v. Ettingshausen,

ordentliche Professoren an der k. k. Universität zu Wien.

Erster Band.

Mit vier Kupfertafeln.

Wien 1826.

Verlag von J. G. Heubner.

VORREDE.

Je eifriger und von je mehreren eine Wissenschaft betrieben wird, desto reger äussert sich der Wunsch, mit den Fortschritten bekannt zu werden, welche diese Wissenschaft in anderen Ländern gemacht hat. In den österreichischen Staaten sind die Freunde der physikalischen Wissenschaften sehr zahlreich und das Verlangen, in diesem Gebiete auch die Arbeiten des Auslandes kennen zu lernen, sehr laut geworden, und man muss dieses als ein gutes Zeichen der Zeit ansehen. So gut man aber auch von den Producten des deutschen Fleisses durch die bereits bestehenden deutschen Zeitschriften über Physik in Kenntniss gesetzt wird, so bleibt doch manche sehr gediegene Arbeit der Engländer, Franzosen und Italiener übrig, welche in deutschen Journalen, bei aller Umsicht und Thätigkeit ihrer Herausgeber, keinen Platz finden kann, weil diese, wie billig, zuerst das aufnehmen, was

auf deutschem Boden wächst, und dabei um so seltener für ausländische physikalische Producte Raum bleibt, als dieser durch die Chemie fast allenthalben stark eingeengt wurde. Für die Verbreitung mathematischer Arbeiten ist noch weniger gesorgt, wahrscheinlich, weil man bei der geringen Zahl der Freunde dieser Wissenschaft Mangel an Lesern fürchtet; allein die beschränkte Zahl mathematischer Leser ist gewiss zum Theile durch den Mangel an Verbreitungsmitteln solcher Kenntnisse bedingt. Würde wohl die Physik und Chemie so um sich gegriffen haben, wenn es keinen Gren und Gilbert, keinen Gehlen und Schweigger gegeben hätte, die durch ihre Zeitschriften diesen Wissenschaften, gewiss eben so viele Freunde erworben haben, als es diese Wissenschaften selbst durch ihre innere Kraft vermochten? Diese Gründe mögen das Erscheinen einer neuen Zeitschrift rechtfertigen, welche sich zum Zweck macht, die besten physikalischen und mathematischen Arbeiten des Auslandes, sie mögen in Journalen oder Abhandlungen gelehrter Gesellschaften oder in nicht periodischen Schriften enthalten seyn, in treuen oder abgekürzten Uebersetzungen, in freien Bearbeitungen oder Auszügen, vorzüglich in den österreichischen Staaten bekannt zu machen, und diesen auch Originalarbeiten des In-

landes einzuverleiben. Für solche Leser, die sich in weitere wissenschaftliche Erörterungen nicht einlassen wollen oder können, soll sie auch einen fortlaufenden Artikel enthalten, der die Fortschritte der Physik in der neueren Zeit in gedrängter Kürze enthält und gleichsam einen Auszug aus den besten physikalischen Zeitschriften aller Nationen darstellt. Von der Chemie soll nur das aufgenommen werden, was in das Gebiet der physikalischen gehört. Die Bearbeitung dieses Zweiges hat Herr Professor Pleischl in Prag übernommen, so wie die eigentlich physikalischen Artikel vom ersten, und die mathematischen vom zweiten der genannten Herausgeber besorget werden, ohne jedoch hierin eine feste Grenze zu setzen.

Uebrigens erscheint diese Zeitschrift in zwanglosen Heften, jedes von 8—9 Bogen, deren vier einen Band ausmachen. Wiewohl man zwischen dem Erscheinen der einzelnen Hefte keinen grossen Zeitraum lassen wird, so will man sich doch an keine bestimmte Zeit binden, um sich ganz nach den Fortschritten der Wissenschaften richten zu können, und nicht in die Nothwendigkeit versetzt zu werden, Lückenbüsser aufzunehmen. Wer einen dem Zwecke dieser Zeitschrift entsprechenden Originalaufsatz in dieselbe aufgenommen wissen will,

wird ersucht, ihn der Verlagshandlung portofrei einzusenden, durch welche auch gleich nach dem Erscheinen desselben ein anständiges Honorar entrichtet wird.

Wien den 15. März 1826.

Die Herausgeber.

ZEITSCHRIFT

FÜR PHYSIK UND MATHEMATIK.

PHYSIKALISCHE ABTHEILUNG.

I. Aräometer zur schnellen Bestimmung des specifischen Gewichtes fester Körper, von A. Baumgartner.

Der Werth eines Instrumentes zur Bestimmung des specifischen Gewichtes der Körper richtet sich zwar in der Regel nur nach dem Grade der Genauigkeit, die es gewährt; allein zu vielerlei Zwecken erlässt man dem Resultate der Bestimmung gerne etwas von seiner Schärfe, wenn man dafür nur schnell eine Angabe erhält, die in den ersten Ziffern richtig ist. Diesem Umstande allein verdanken wohl unsere Aräometer mit Scalen ihre grosse Verbreitung, denn sie führen schnell zum Zwecke, wiewohl auf Kosten der Genauigkeit. Für feste Körper kannte man bis jetzt kein aräometrisches Mittel, das in Rücksicht der Leichtigkeit des Gebrauches sich jenen Instrumenten an die Seite stellen könnte, denn das Nicholsonsche Aräometer, welches sich ihnen noch am meisten nähert, gibt nicht das specifische Gewicht unmittelbar an, sondern nur die Data zu dessen Berechnung; es ist aber

nicht jedermanns Sache, diese wenn auch äusserst einfache Rechnung zu vollziehen.

Das folgende Instrument dürfte daher Manchem nicht unangenehm seyn, indem es das specifische Gewicht fester Körper zwar mit geringer Schärfe, aber dafür entweder unmittelbar ohne alle Rechnung oder mittelst einer einfachen Multiplication angibt.

Fig. 1 stellt dieses Instrument vor, und zeigt, dass es zwischen einem Nichelsonschen und einem gewöhnlichen Scalenaräometer das Mittel hält. *A* stellt den Körper desselben, *B* und *C* zwei Schalen, *ED* die Scale vor. In der Einrichtung der letzteren liegt das Wesentliche dieses Instrumentes, zu deren näheren Kenntniss den Leser folgende Betrachtung führen wird:

Gesetzt, es bestehe der Hals des Instumentes aus einer völlig cylinderischen Röhre von Glas, und enthalte eine Scale, wovon vor der Hand nur die zwei äussersten Puncte verzeichnet sind, ferner sey dieses Instrument so eingerichtet, dass es sich ohne Belastung in reines Wasser von der gewöhnlichen Luftwärme bis zum untersten Punct der Scale eintaucht, der mit 1,00 bezeichnet ist. Hätte man nun das specifische Gewicht eines Körpers zu bestimmen, dessen Masse sich nach Belieben vermehren oder vermindern lässt, so könnte man es dahin bringen, dass er, auf die obere Schale des Instrumentes gelegt, die Einsenkung desselben bis zum obersten Puncte der Scale bewirkte. Würde er nun von der oberen Schale weggenommen, dafür in die untere gelegt, und sammt dem Instrumente in das vorige Wasser getaucht, so

würde nicht die ganze Scale in der Flüssigkeit stehen, und man könnte aus ihr abnehmen, der wievielte Theil derselben der Länge nach über sie hervorragt. Da sich nun die ganze Länge der Scale = 1 zu diesem hervorragenden Stücke $= \frac{a}{b}$, verhält wie das Gewicht des Körpers in der Luft zu seinem Gewichts-Verluste im Wasser; so ist dessen specifisches Gewicht $1 : \frac{a}{b} = \frac{b}{a}$, wenn man das des Wassers zur Einheit annimmt. Wenn daher die ganze Scale der Länge nach in 2, 3, 4, 5, 6 etc., allgemein in n gleiche Theile getheilt wird, und man zu jedem Theilstriche den Bruch verkehrt schreibt, der anzeigt, den wievielten Theil der ganzen Scalenlänge sein Abstand vom obersten Puncte beträgt; so wird hiedurch das specifische Gewicht des Körpers angezeigt, der auf die obere Schale des Instrumentes gelegt, die Einsenkung bis zum obersten Punct der Scale bewirkt. Auf diese Weise fände man das specifische Gewicht eines Körpers unmittelbar ohne Rechnung. Allein bei wenigen Körpern hat man es in seiner Macht, ihre Masse gerade so abzuändern, dass sie durch ihr Gewicht das Aräometer bis zum obersten Punct der Scale einzusenken vermag. Man habe nun mit einem solchen Instrumente einen Körper A zu untersuchen, dessen Gewicht zu gering ist, um die Einsenkung desselben bis zum obersten Punct der Scale zu bewirken, und es tauche sich dieses nur so weit ein, dass der m^{te} Theil der Scale im Wasser stehe. Wäre dieser Theil so, wie vorhin die ganze Scale, als Einheit angenommen und eben so wie diese abgetheilt

und beziffert, so würde man offenbar durch ein dem vorigen ähnliches Verfahren das specifische Gewicht von *A* unmittelbar finden, aber es müssten die Theilstriche dieser kleineren Scale im Verhältnisse 1 : *m* einander näher liegen, als in der zuerst angenommenen grösseren.

Wenn man daher zu diesem Körper *A* irgend eine beliebige Masse, z. B. Metallstückchen, Bleischrott etc. gäbe, bis die Einsenkung auf den obersten Punct der Scale erfolgte, hierauf den Körper *A* in die untere Schale brächte, ohne die Zulage von der oberen wegzunehmen, so würde die dem Einsenkungspuncte entsprechende Zahl das specifische Gewicht dieser Masse in dem Verhältnisse 1 : *m* zu gross angeben, und man müsste dieses Resultat mit dem Quotienten dieses Verhältnisses, nämlich *m* multipliciren.

Es wäre daher nebst voriger Scale noch eine andere nothwendig, die anzeigte, den wievielten Theil der ganzen Scalenlänge das Stück von irgend einem Puncte derselben bis zum untersten beträgt. Die jedem Puncte beigesetzte Zahl gäbe dann den Werth von *m*.

Aus diesem kann man entnehmen, dass man auf folgende Weise die Scale leicht und richtig erhält: Man nehme die Länge derselben so an, dass nicht durch eine zu grosse Ausdehnung derselben das Instrument die nöthige Stabilität verliere, aber auch nicht durch eine zu unbedeutende Kürze der Gebrauch desselben unnöthiger Weise beschränkt werde. Bei einem Instrumente, dessen Körper aus dünnem Messingblech gearbeitet ist, etwa 2 Zoll im

Durchmesser und 4 Zoll Länge hat, kann die Scale immer eine Länge von 8 — 10 Zoll bekommen, wenn man sie an dem etwa 2 Linien dicken Halse anbringt. An der Scale bemerkt man zuerst die 2 äussersten Puncte, und theilt sie der Länge nach in 2 Theile, *A* und *B*, die durch einen vertikalen Strich von einander getrennt sind. Der Theil *A* wird in 100 gleiche Theile getheilt, als wäre er zur Scale eines hunderttheiligen Thermometers bestimmt, dessen oberster Punct mit 100 der unterste mit 1 bezeichnet, die Theilstriche des Theiles *B* hingegen werden durch die des ersteren *A* bestimmt, und zwar nach folgender Tabelle:

Entsprechende Theile

der Scale *A.*	der Scale *B.*	der Scale *A.*	der Scale *B.*
100	—	86.8	7.5
95.0	20	85.7	7
94.8	19	85.5	6.8
94.5	18	85.0	6.6
94.1	17	84.4	6.4
93.7	16	83.9	6.2
93.3	15	83.4	6.0
92.9	14	82.8	5.8
92.3	13	82.2	5.6
91.7	12	81.5	5.4
91.3	11.5	80.8	5.2
91.0	11	80.0	5.0
90.5	10.5	79.2	4.8
90.0	10	78.3	4.6
89.5	9.5	77.3	4.4
88.9	9	76.2	4.2
88.3	8.5	75.0	4.0
87.5	8	73.7	3.8

Entsprechende Theile			
der Scale *A*.	der Scale *B*.	der Scale *A*.	der Scale *B*.
72.2	3.6	44.5	1.80
70.6	3.4	42.9	1.75
68.8	3.2	41.2	1.70
66.7	3.0	39.4	1.65
65.5	2.9	37.5	1.60
64.3	2.8	35.5	1.55
63.0	2.7	33.3	1.50
61.5	2.6	31.0	1.45
60.0	2.5	28.6	1.40
58.3	2.4	25.9	1.35
56.5	2.3	23.0	1.30
54.6	2.2	20.0	1.25
52.4	2.1	16.7	1.20
50.0	2.0	13.0	1.15
48.8	1.95	9.1	1.10
47.4	1.90	4.8	1.05
45.8	1 85	0.	1.00

Der Gebrauch des Aräometers mit einer solchen Scale ist nun sehr einfach: Man lege den zu bestimmenden Körper auf die obere Schale, bemerke an der Scale *A* die Zahl, welche der Oberfläche des Wassers entspricht, lege eine beliebige Masse zum abzuwägenden Körper, bis die Einsenkung auf o erfolgt, wenn dieses nicht zufällig schon ohne Zulage der Fall war, gebe den zu prüfenden Körper in die unten im Wasser befindliche Schale, ohne das Zuleggewicht aus der oberen zu nehmen, und lese die der Oberfläche des Wassers entsprechende Zahl der Scale *B* ab. Diese gibt das specifische Gewicht desselben unmittelbar an, wenn der Körper ohne Zulage die Einsenkung bis o bewirken konnte. Brauchte er aber ein

Zuleggewicht, so multiplicirt man diese Zahl mit der vorhin an der Scale *A* beobachteten und schneidet vom Producte um zwei Decimalstellen mehr ab, als der eine Factor enthält. Wäre z. B. das Instrument zuerst bis 75 der Scale *A* eingesunken, hätte aber, als der zu prüfende Körper sich in der unteren Schale befand, eine Einsenkung bis 4,5 von *B* erlitten, so erhält man als Product beider Zahlen 3375 und daher als specifishes Gewicht 3,375.

Es ist leicht einzusehen, dass die specifischen Gewichte der Körper mittelst dieses Instrumentes desto genauer gefunden werden, je näher sie dem des reinen Wassers kommen. In der Nähe dieses kann man noch recht wohl Hunderttheile des Ganzen wahrnehmen, während bei einem specifischen Gewichte über 5 nur mehr Zehntel, bei viel höheren gar nur Einheiten zu unterscheiden sind. Glücklicher Weise liegen die specifischen Gewichte der meisten Körper zwischen 1 und 4. Mir lag ursprünglich an diesem Instrumente desshalb nicht wenig, weil ich glaubte, dass Mineralogen, welche nach dem Mohsschen Systeme die Naturkörper bestimmen wollen, mit so weit genäherten Resultaten, wie sie hierdurch gefunden werden, schon zum Ziele gelangen, und diesen glaube ich auch vorzugsweise dadurch einen kleinen Dienst zu erweisen.

II. Ueber die menschliche Stimme von Felix Savart.

(Annales de Chimie et de Physique. Septemb. 1825.)

1.

Seit den Untersuchungen von Dodart, die im Jahre 1700 bekannt gemacht wurden, haben viele Physiker und Anatomen die Bildung der menschlichen Stimme zu erklären gesucht, ohne dass man eine dieser Erklärungen für zureichend halten kann; es bewegen sich auch fast alle Meinungen um denselben Grundgedanken herum.

Dodart hat die menschlichen Laute mit den Tönen verglichen, die durch Reibung der Luft an den Rändern einer geraden an gespanntem Papier angebrachten Oeffnung entstehen, und glaubte an einer vermeintlichen Aehnlichkeit zwischen den Stimmorganen des Menschen und den Mundstücken an Hoboen, Fagotten etc., eine Stütze für seine Meinung zu finden.

Ferrein hielt Dodarts Arbeit für ungenügend, weil eine so kleine Luftsäule, wie die im Kehlkopf enthaltene, keine so tiefen Laute geben kann, wie sie der Mensch hervorbringt, und dieselbe Schwierigkeit Statt findet, wenn man die Stimmbänder mit vibrirenden Saiten vergleicht; desshalb dachte er sich das menschliche Stimmorgan zugleich als Blas- und als Saiteninstrument. Allein in seiner Denkschrift kommt kein Wort über die Schwingungen der Luft weiter vor, und es handelt sich nur immer um die Töne, welche die unteren Ligamente der Stimmritze hervorbringen, je nachdem sie mit den sie umgeben-

den Theilen in Verbindung stehen, oder der ganzen Länge nach frei und nur an ihren Enden mit dem Kehlkopfe verbunden sind. Es sind ihm daher die Stimmorgane nur Saiteninstrumente, bei welchen die von den Lungen ausgeathmete Luft als Streichbogen dient; auch sagt er nichts vom Nutzen der oberen Ligamente und der Taschen (ventriculi). Sein Hauptirrthum war, dass er meinte, die Tiefe der Töne rühre davon her, dass die Stimmbänder durch einen Luftstrom in Bewegung gesetzt werden.

Ungeachtet dieser Arbeit von Ferrein hat man doch noch immer die Stimmorgane mit Mundstücken verglichen, ja die Erfindung freier Mundstücke von Grénié hat dieser Erklärung in unseren Zeiten mehr Entwicklung und einen grösseren Schein von Wahrheit zu ertheilen gestattet, als es Dodart möglich war. Da entsteht nun die Frage, ob zwischen dem Stimmorgane und den freien Mundstücken eine völlige Analogie Statt finde?

Gegen diese Analogie spricht vorzüglich der Umstand, dass die Beschaffenheit der menschlichen Laute weit von den Tönen der vollkommensten Mundstücke abweicht und überhaupt durch kein Blasinstrument nachgeahmt werden kann. Nach der als richtig anerkannten Theorie und nach der Erfahrung ist es zur Erzeugung eines Tones durch ein Mundstück unerlässlich, dass das Züngelchen die Wände der Spalte, in der es sich bewegt, fast berühre, damit das Entweichen der Luft nur periodisch erfolge. Soll nun das Stimmorgan mit einem freien Mundstück verglichen werden können, so darf der Kehlkopf keinen Ton hören lassen, so lange die unteren Stimmbänder

von einander entfernt sind, und beim Singen müssten sie einander fast berühren, die in der Luftröhre verdichtete Luft müsste sich mit Gewalt einen Weg bahnen, indem sie selbe von einander entfernt, sie müssten sich einander wieder nähern, wenn die Spannkraft der Luft sie nicht mehr überwältigen kann, es müsste wieder eine neue Verdichtung eintreten u. s. f. Dabei würde es sehr viel Anstrengung kosten müssen, einen Ton hervorzubringen, weil die Schildgiessbeckenmuskeln (thyro-arythenoidei) sehr dick und kräftig sind, und nicht wohl einem sehr langsamen Luftstrome nachgeben, wenn sie sich einmal zusammengezogen haben, und doch weiss jeder, dass er einen Ton von sich geben kann, selbst wenn er den Athem zum Theil in sich hält; endlich sieht man nicht ein, wozu nach dieser Ansicht die Taschen, die oberen Bänder und die zwei Falten der schleimigen Häute dienen sollen, welche mit dem Kehldeckel eine kleine häutige Röhre ober der Stimmritze bilden.

Es ist wahr, dass man einen Laut erhält, wenn man von einem Kehlkopf alles bis auf die Schildgiessbeckenmuskel wegnimmt, sie bis zur Berührung einander nähert und dann durch die Luftröhre einen kräftigen Luftstrom einbläst; auch muss es so seyn, weil man so ein wahres Mundstück erzeugt. Wenn man aber, statt die Luft mit einem Blasbalge in die Luftröhre zu treiben, wie man es bisher gemacht hat, durch ein in die Luftröhre gestecktes Rohr zu blasen sucht, so findet man, dass man nur durch grosse Anstrengung zum Ziele gelangt, und dass die so erhaltenen Laute mit der menschlichen Stimme in keiner Beziehung stehen, sondern hoch sind und mit denen

der schreiendsten Mundstücke einerlei Charakter haben. Lässt man aber alle Theile des Kehlkopfes in ihrem natürlichen Zustande, nähert nur die Arytenoideen einander und bläst dann schwach in die Luftröhre, so erhält man viel angenehmere und der menschlichen Stimme ähnlichere Töne, und doch sind in diesem Falle die Schildgiessbeckenmuskel nicht gespannt, sondern lassen eine elliptische Oeffnung zwischen sich, deren grösserer Durchmesser 7 — 10 L., der kleinere aber 2 — 3 L. beträgt. Man kann daher nicht zugeben, dass die Stimmorgane Mundstücken ähnlich seyen, sondern man muss annehmen, dass die über den unteren Bändern des Kehlkopfes liegenden Theile eine bedeutende Rolle bei der Bildung der Laute spielen. Wir werden sehen, dass die Stimme wie in Flötenwerken hervorgebracht wird, und dass die kleine im Kehlkopfe und im Munde vorhandene Luftsäule vermög der Natur der elastischen Wände, welche sie einschliessen, und der Art, wie sie in Schwingungen geräth, Laute eigener Art erzeugen kann, die zugleich viel tiefer sind als es ihre Dimensionen zuzulassen scheinen. Zu diesem Behufe müssen wir aber mehrere bisher unbekannt gebliebene Thatsachen auseinander setzen.

2.

Es ist bekannt, dass in Orgelpfeifen, deren Länge ihren Durchmesser 12 — 15mal übertrifft, die Geschwindigkeit des die Schwingungen erregenden Luftstromes auf die Anzahl dieser Schwingungen nur einen geringen Einfluss hat, und dass man so den Ton nur mit Mühe um ein halbes Intervall erhöhen

kann, indem er gleich in die nächst höhere Octave überschlägt, wenn man zu viel Kraft anwendet: eben so erfolgt auf die Verminderung der Geschwindigkeit des den Schall erregenden Luftstromes nur eine Schwächung des Tones und eine kaum merkliche Vertiefung desselben. Aber in kurzen Pfeifen ist der Einfluss der Geschwindigkeit sehr gross, ja in kubischen Pfeifen kann man so den Ton vom Grundton bis zur Quint steigern, wiewohl es auch bei diesen einen Ton gibt, der am leichtesten anspricht, und der reinste und stärkste von allen ist.

Die Jäger brauchen zur Nachahmung der Stimme gewisser Vögel ein kleines Instrument, in welcher die Geschwindigkeit des Luftstromes eine noch grössere Rolle spielt. Es ist gewöhnlich von Bein, oft auch von Holz oder Metall, seine Gestalt ist verschieden, bald eine cylindrische Röhre von 8—9 L. Durchmesser und 4 L. Höhe, an beiden Enden mit einer ebenen dünnen Platte geschlossen, die in der Mitte mit einem 2 L. im Durchmesser haltenden Loche versehen ist (Fig. 2), oft ist es ein kleines halbkugelförmiges Gefäss mit ähnlichen einander gegenüber stehenden Löchern, wie Fig. 3 zeigt. Die Jäger nehmen dieses Instrument zwischen die Zähne und die Lippen und indem sie die Luft mit grösserer oder geringerer Gewalt durch die beiden Oeffnungen treiben, erhalten sie verschiedene Töne. Man gelangt sicherer zu demselben Resultate, wenn man diesen kleinen Apparat mit einem cylindrischen Luftbehälter (Windlade) versieht, wie Fig. 4 zeigt, und kann dann Töne, die innerhalb zweier Octaven liegen, hervor bringen, ja wenn man recht des Luftstromes Meister geworden

ist, so scheint es, als gäbe es in der Tiefe der hervorbringbaren Töne keine andere Grenze, als welche in der Schwierigkeit, den Wind recht zu mässigen liegt; für höhere Töne scheint es gar keine bestimmte Grenze zu geben, denn es nimmt die Höhe derselben zu, sobald die Geschwindigkeit des Luftstromes wächst. Aber nicht alle diese Töne sind von einerlei Beschaffenheit, die tieferen sind dumpf und schwach, die höheren fast unerträglich schneidend, die zwischen beiden liegenden hingegen sehr intensiv, rein und hell. Es herrscht zwischen diesen Tönen und denjenigen, welche durch ein von seiner Ansatzröhre abgenommenes Mundstück hervorgebracht werden, eine grosse Aehnlichkeit, sowohl was den Charakter der Töne als auch die Möglichkeit betrifft, durch blosse Aenderung der Geschwindigkeit des Luftstromes alle Töne innerhalb $1\frac{1}{2}$ — 2 Octaven hervorzubringen, so dass es scheint, es liegen beiden ähnliche Ursachen zum Grunde. Man kann das Volumen dieses Instrumentes um das doppelte oder vierfache vergrössern oder verkleinern und seine Gestalt auf viele Arten abändern, ohne andere Resultate hervorzubringen als die genannten; nur tiefe Töne wird man desto leichter hervorbringen können, je grösser die Dimensionen sind; doch gibt es in jedem Instrumente einen Ton, der sich leichter als jeder andere hervorbringen lässt, und am intensivsten ist. Aendert man eine Dimension des Instrumentes, so ändert sich auch dieser Ton, und an einem Instrumente, bei dem man der Höhlung die jedem Ton angemessenste Grösse geben könnte, müssten alle Töne dieselbe Intensität bekommen. Bei übrigens gleichen Umstän-

den hat der Durchmesser der Oeffnung einen sehr merklichen Einfluss auf die Höhe und Tiefe der Töne und sie sind im Allgemeinen desto tiefer, je breiter die Oeffnung ist.

Diese Töne scheinen dadurch zu entstehen, dass der Luftstrom, welcher durch die beiden Oeffnungen zieht, die geringe im Bauche des Instruments enthaltene Luftmenge mit sich fort führt, ihre Ausdehnsamkeit vermindert und sie dadurch unfähig macht, dem äusseren Luftdrucke zu widerstehen, dieser wirkt auf sie, drückt sie zusammen, bis sie vermög ihrer eigenen Elasticität und durch den Einfluss des beständig fortdauernden Luftstromes wieder eine Verdünnung erleidet, auf welche eine neue Verdichtung folgt u. s. f. Erfolgt dieser Wechsel hinreichend schnell, so entstehen Luftwellen, die sich in die äussere Luft erstrecken und die Empfindung eines bestimmten Schalles erregen. Indess hat auch die Natur der Wände des Instrumentes einen Einfluss auf die Anzahl der Schwingungen und die Beschaffenheit des davon herrührenden Schalles; man bemerkt, dass die Wände stark mitschwingen, wenn sie dünn sind und dass die Töne dann grell und kreischend werden; ein Instrument von halbkugelförmiger Gestalt, bei welchem die ebene Wand von einem dünnen dehnbaren z. B. pergamentnen Plättchen gebildet wird, spricht leichter an und gibt im Allgemeinen tiefere, völlere und angenehmere Töne, als wenn diese Wand aus einer starren Substanz besteht. Uebrigens hängt die Beschaffenheit des Tones endlich auch noch von der Richtung der Wände der Oeffnungen ab. Stehen sie schief gegen Innen, wie in Fig. 5, so sind die Tö-

ne tiefer und minder ausgiebig; es scheint, als wirke der Rand der Oeffnung, gegen den der Luftstrom hinfährt, so wie die Lefze an einer Orgelpfeife, man kann ihn sehr dick und abgerundet machen, ohne im Tone eine merkliche Aenderung dadurch hervorzubringen, gerade wie bei Orgelpfeifen, wo man auch die Lefzen nicht schneidend scharf zu machen braucht, wo sie 1 — 3 L. dick seyn können, ohne dass der Ton eine Aenderung erleidet.

3.

Man glaubt allgemein, bei einer Orgelpfeife habe das Material derselben keinen Einfluss auf die Höhe des Tones. Dieser Meinung entspricht die Erfahrung wohl bei sehr langen Pfeifen mit festen widerstehenden Wänden, aber bei kurzen ist sie falsch, ja die Natur der Lefzen kann selbst bei langen Pfeifen auf den Ton grossen Einfluss nehmen. Nimmt man bei einer etwa 2 F. langen und 2 Z. breiten Pfeife statt des festen Plättchens, welches die Lefzen bildet, ein elastisches von Tuch oder Pergament, das man nach Belieben spannen kann, so ändert sich der Ton um eine Quart, selbst um eine Quint, wenn man die Spannung mehr und mehr verstärkt und zugleich die Geschwindigkeit des Luftstromes vergrössert. Bei kürzeren Pfeifen vereinigt sich der noch grössere Einfluss der Geschwindigkeit des Luftstromes mit dem der Spannung und es geht daraus eine noch grössere Wirkung hervor; daher kommt es, dass sich der Ton einer kubischen Pfeife leicht um eine Octave vertiefen lässt, wenn die Wände einer sehr verschiedenen Spannung fähig sind; können gar die Wände der

Pfeife die Schwingungen der darin enthaltenen Luft begleiten und kann zugleich ihre Spannung abgeändert werden, so ist ihr Einfluss auf die Anzahl dieser Schwingungen so gross, dass es scheint, als könne man den Ton ohne Ende vertiefen. Ueberzieht man quadratförmige Rahmen mit Papier oder Pergament, und verbindet sie zu einer kubischen Pfeife, so gibt diese bei einer grossen Spannung der Wände fast einen so hohen Ton, als bestände sie aus einer ganz starren Substanz. Vermindert man die Spannung der Wände durch Benetzen mit Wasser, so wird der Ton desto tiefer, je mehr die Spannung nachlässt und man kann ihn so um mehr als zwei Octaven vertiefen, ohne ihn unhörbar zu machen, aber er wird immer schwächer, so wie er tiefer wird. Zur Nachtszeit, wo es ruhig ist, findet man fast keine Grenze in der Vertiefung. Man kann sich mittelst Sand vom Mitschwingen der Wände versichern; dieser zeigt gewöhnlich auf jeder Wand eine elliptische oder kreisförmige Knotenlinie von veränderlichem Durchmesser, auch bemerkt man, dass die obere und untere Wand am meisten mitschwingt und den grössten Einfluss auf die Vertiefung des Tones hat.

Kurze, an beiden Seiten offene Pfeifen geben viele von einander verschiedene Töne, selbst wenn die Wände nur zum Theile aus einem häutigen Stoffe bestehen. So kann z. B. eine 9 Zoll lange Pfeife mit quadratförmiger Basis von 18 L. Seite, die eigentlich den Ton d_4 geben sollte, wenn die der Mündung nächste Hälfte der Wände aus einem häutigen, dünnen, gespannten Körper besteht, viel tiefere Töne geben, nämlich die zwischen c_3 und c_4 liegen-

den und selbst einige von denen, welche innerhalb c_2 und c_3 enthalten sind.

Die Töne der Pfeifen mit häutigen Wänden haben zum Theile etwas vom Tone der Flötenpfeifen, und etwas von freien Mundstücken an sich; man darf sich keineswegs wundern, dass er sich mit einem Tone eines bekannten Instrumentes nicht vergleichen lässt, denn unsere musikalischen Instrumente haben keine diesen ähnliche Pfeifen, sie sind in gewissem Sinne das umgekehrte der Saiteninstrumente, denn bei diesen wird die im Resonanzkasten befindliche Luft durch die festen Wände desselben in Bewegung gesetzt, während in Pfeifen mit häutigen Wänden die Luft ihre Bewegung den Wänden mittheilt.

4.

Ich habe in einer früheren Arbeit gezeigt, dass man, um eine Luftmasse in Schwingungen zu versetzen, nur in irgend einem Puncte derselben einen Schall unmittelbar zu erregen braucht. So wird in den Orgelpfeifen der Ton anfänglich nur in der Mündung erregt, unabhängig von den Vibrationen der Luftsäule, so dass das von einer Pfeife getrennte Mundstück denselben Ton gibt, wie die daran gesetzte Röhre. Diese Luftschwingungen gehen vom Orte, wo sie erregt wurden, aus, um sich in der ganzen Luftmasse fortzupflanzen, und diese regulirt die Beweguug so, dass daraus volle und angenehme Töne hervorgehen. Eben so geräth die Luft an der Mündung eines Gefässes durch den Einfluss einer daselbst befindlichen Platte aus Glas oder Metall, oder einer Stimmgabel

in Schwingungen, und kann sehr intensive Töne geben. So oft man daher am Ende einer Luftsäule durch irgend ein Mittel einen Schall erregt, geräth sie selbst in Schwingungen, wenn nur ihre Dimensionen der Länge der unmittelbar erzeugten Welle entsprechen. Befestigt man einen Blasbalg an der convexen Seite eines hemisphärischen Instrumentes, wie das vorher besprochene war, und bringt an der ebenen Seite eine Röhre (Fig. 6) an, so muss dieser Apparat einen Ton geben, wie ihn die in der Röhre eingeschlossene Luftsäule von sich gibt, vorausgesetzt, dass unter den Tönen, die das kleine Instrument für sich gibt, einer vorkommt, den die Luftsäule geben kann. Dieses zeigt die Erfahrung wirklich. Es vertritt daher das kleine Instrument die Stelle der Lefzen bei den Orgelpfeifen. Man kann es auch ohne Aenderung des Effectes wie Fig. 7 und 8 machen.

Die so erhaltenen Töne unterscheiden sich von denen der gewöhnlichen Orgelpfeifen, sie können sehr intensiv und hell werden, wenigstens wenn der Apparat aus Metall besteht, und die Luftsäule die rechten Dimensionen hat; denn da sich die ursprünglichen Luftschwingungen nur auf einen sehr kleinen Raum beschränken, so werden sie für Luftsäulen von etwas bedeutendem Durchmesser unzureichend.

Dieses Instrument kann, wie eine beiderseits offene Orgelpfeife, nur Töne geben, welche in die Reihe c_1, c_2, g_2, e_3, g_3, etc. gehören, dessungeachtet kann es sich treffen, dass das kleine Gefäss, unabhängig von der Luftsäule schwingt, dann sind aber die Töne schwach und unrein.

Aus dem Vorhergehenden ist klar, dass man an

einer so eingerichteten Pfeife mit Wänden, die verschiedene Grade der Spannung erleiden, alle Töne hervorbringen kann, welche innerhalb gewisser Grenzen liegen, die von der Spannung der Wände und vom Volumen der Luft abhängen, und obwohl letzteres klein ist, so kann es doch die Bewegung so einrichten, dass tiefere Töne erzeugt werden, als sonst die durch widerstehende Wände eingeschlossene Luft geben könnte.

Hat die Röhre, welche die schallende Luft enthält, Seitenlöcher, so beobachtet man, dass ein durch einen Blasbalg erregter gleichförmiger Luftstrom Töne erzeugt, die sich ändern, wenn man die Löcher schliesst, welche vorhin offen waren und umgekehrt, so dass es vielleicht nicht unmöglich wäre, auf diese Art ein musikalisches Instrument zu bauen.

5.

Der Grundton einer einerseits geschlossenen Pfeife von durchaus gleichem Durchmesser ist im Allgemeinen um eine Octave tiefer, als der einer beiderseits offenen Pfeife. Dieses ist aber bei Pfeifen von ungleichem Durchmesser z. B. bei kegelförmigen, pyramidalen nicht der Fall, wenn man sie an ihrer engeren Seite anbläst. Das Intervall zwischen dem Ton, den eine solche ganz offene Pfeife gibt und den, welchen eine einerseits geschlossene hören lässt, ist für dieselbe Länge desto gröser, je bedeutender der Neigungswinkel der Wände ist. So gibt z. B. eine conische beiderseits offene Pfeife von $4\frac{1}{2}$ Z. Länge, deren kleinster Durchmesser 6 L., deren grösster 2 Z. beträgt, den Ton c_5, ist sie aber auf einer Seite geschlossen,

den Ton e_3. Wenn der Durchmesser der grössten Oeffnung bedeutender, noch mehr aber, wenn der der kleinsten minder ist, während die übrigen Dimensionen dieselben sind, so kann der Ton noch um mehr als 2 Octaven tiefer werden.

6.

Es ist unmöglich, den Hergang der Sache bei der Bildung der menschlichen Stimme zu begreifen, ohne die innere Form des Kehlkopfes zu kennen. Um sich diese Kenntniss zu erwerben, giesse man in dieses Organ eine Substanz, die hart wird, wie Gips, und einen festen Kern gibt, der dessen innere Gestalt getreu darstellt. Fig. 9 stellt diesen Kern, der auf solche Art erhalten wurde, in natürlicher Grösse vor. *AA'* sind die Taschen, die eine eigenthümliche Form haben und ziemlich ausgedehnt sind; manchmal reichen sie noch weiter hinauf, und als in dieser Figur, und ihr oberster Theil berührt die fettigen Körper der Basis des Stimmritzendeckels Ich sah zwei Individuen, bei denen sie 2 Zoll vom Grund bis zum höchsten Puncte massen, gewöhnlich haben sie aber 5 —6 L. Höhe. Im Raume *BB'* befinden sich die Sprachbänder und Schildgiessbeckenmuskel, und den Raum *CC'* nehmen die oberen Bänder ein. Fig. 10 stellt denselben Körper von einer anderen Seite vor. Diese zeigt besser als die vorige die Ausdehnung der Falten der schleimigen Membrane, welche sich vom Stimmritzendeckel bis zum entsprechenden Giessbecken erstreckt. Diese Falte nimmt den Raum *ABB'* ein, und endiget sich ober der Linie *AC*. Fig. 11 stellt einen Schnitt des Kernes nach der Linie *LM* vor,

welche das Organ in zwei Theile, in den vorderen und hinteren theilt. Diese Figur gibt eine richtige Vorstellung von der inneren Gestalt des Kehlkopfes und zeigt, dass zwischen ihm und der Fig. 8 eine grosse Aehnlichkeit Statt findet.

7.

Nach diesem ist es leicht, sich von der Bildung der Stimme Rechenschaft zu geben, indem man das Stimmorgan, welches aus dem Kehlkopf, dem Schlunde und Munde besteht, wie eine conische Röhre betrachtet, in welcher die Luft wie in den Flötenwerken der Orgeln schwingen kann. Diese Röhre hat alle nöthigen Eigenschaften, vermög welcher die darin enthaltene Luft, ungeachtet ihres geringen Rauminhaltes eine grosse Anzahl, mitunter auch sehr tiefer Töne geben kann, ihr unterer Theil ist von elastischen Wänden gebildet, die eine sehr verschiedene Spannung annehmen können, während der Mund, indem er sich mehr oder weniger öffnet und dadurch die Dimensionen der Luftsäule abändert, einen bedeutenden Einfluss auf die Anzahl der Schwingungen ausübet; dazu kommt noch, dass die Lippen, indem sie sich einander nähern, oder sich von einander entfernen, die Sprachröhre bald in eine offene, bald in eine fast geschlossene Röhre umwandeln.

Es ist bemerkenswerth, dass der Ton einer conischen nur wenig abgestumpften Röhre von beinahe gleicher Capacität mit dem Sprachorgane und derselben Länge, nämlich $4\frac{1}{2}$ Z., nur wenig vertieft werden darf, um einer derjenigen zu seyn, den auch der Mensch hervorbringen kann, eine ähnliche, beiderseits

offene Röhre gibt den Ton c_5, und viele Menschen können in der Höhe des Tones a_4 erreichen, der nur um eine kleine Terz tiefer ist. Schliesst man die Basis dieser Röhre grösstentheils, so vertieft sich dadurch der Ton leicht bis c_4 und darüber, man braucht ihn daher nur noch etwa um eine Octave tiefer zu machen, um Töne hervorzubringen, wie die tiefsten der menschlichen Stimme sind. Wenn man aber bedenkt, dass die im Sprachorgane enthaltene Luftsäule, besonders unten, von dehnbaren Wänden umgeben ist, die also selbst schwingen und auf die Bewegung der Luft Einfluss haben, indem sie daran Theil nehmen, so begreift man, dass die Vertiefung um eine Octav leicht Statt haben kann. Construirt man eine pyramidale Röhre von beinahe gleicher Capacität und Länge mit der Stimmröhre, deren untere Wand in dem der engeren Oeffnung zugekehrten Drittel, der Länge nach, von einer häutigen Substanz gebildet ist, so kann man damit alle Töne der menschlichen Stimme hervorbringen, indem man theils die Spannung der Membrane abändert, theils die grössere Oeffnung mehr oder weniger schliesst, jedoch so, dass sie nie ganz geschlossen ist. Der einzige bemerkungswerthe Unterschied zwischen einer Pfeife mit häutigen Wänden und der Stimmröhre liegt in der Art des Ansprechens, die für letztere der dem Instrumente Fig. 8 eigenen ähnlich ist. Die Luftröhre *TT′* (Fig. 11) endiget sich oben in eine Spalte, die mehr oder weniger gerade werden kann, durch gegenseitige Näherung der Giessbecken und durch Contraction der Schildgiessbeckenmuskel, *BB′*. Diese Oeffnung spielt offenbar die Rolle, wie das Windloch der auf einer Seite geschlossenen Orgel-

pfeifen. Der Luftstrom, welcher aus ihr kommt, geht durch den Raum zwischen den Taschen, und bricht sich an den oberen Bändern, die wiewohl sie abgerundet sind, doch nicht die Function der Lefzen an Orgelpfeifen verrichten können, daher geräth die Luft in den Taschen in Vibration und gibt einen Ton, der für sich ohne Zweifel sehr schwach wäre, aber an Intensität gewinnt, weil sich die Wellen, die von den zwischen den oberen Bändern befindlichen Zwischenräumen ausgehen, in der oberhalb liegenden Stimmröhre fortpflanzen und dort die Schwingungen dahin abändern, dass sie denen in kurzen und zum Theile aus häutigen Substanzen gebildeten Röhren ähnlich sind.

Damit aber der so hervorgebrachte Schall alle ihn charakterisirenden Eigenschaften erlangt, muss die Spannung des dehnbaren Theils der Wände der Stimmröhre sowohl mit der der Taschen, als auch mit der der oberen und unteren Bänder im gehörigen Verhältnisse stehen, und die Grösse der Oeffnung, durch welche die Luft streicht, muss sich auch auf eine entsprechende Art ändern, um den besten Effect hervorzubringen. Desshalb hat die Natur alle Theile mit einem elastischen und muskulösen Ueberzug versehen. Der Schildgiessbeckenmuskel bildet die inneren und äusseren Wände der Taschen, trägt aber nichts zur Bildung des oberen Bandes bei*). Die oberen Bänder haben keine eigenen Muskel, aber sie sind von

---

*) Die wenn auch sehr genaue Beschreibung des thyro-arytenoideus, welche der Verfasser hier folgen lässt, bleibt weg, weil sie für physikalische Leser kaum das gehörige Interesse haben dürfte.

einer sehr festen Substanz gebildet, und dick genug, um jedes fremden Beistandes entbehren zu können; wiewohl ihr freier Rand abgerundet ist, so kann dieses doch, wie oben bemerkt wurde, der Erzeugung des Schalles nicht hinderlich seyn.

Die merkwürdigste Einrichtung des menschlichen Stimmapparates besteht darin, dass sich der Kehlkopf nach oben in zwei Falten von schleimigen Häuten endiget, die mitten in der schwingenden Luft hängen, und nothwendig die Schwingungen mit ihr theilen müssen. Es ist kein Zweifel, dass diese zwei Falten auf die Modulation und Articulation der Stimme, so wie auf ihren Charakter einen grossen Einfluss haben; denn der untere Kehlkopf derjenigen Vögel, welche einen sehr abwechselnden Gesang haben und reden lernen können, hat eine ähnliche Einrichtung, während man bei Vögeln, deren Stimme sehr beschränkt ist, selbst wenn ihr Kehlkopf ganz eigene Muskeln hat, nichts dergleichen bemerket. Da diese schwebenden Membranen einer verschiedenen Spannung fähig sind, so muss ihr vorzüglichster Nutzen darin bestehen, bald plötzlich, bald stufenweise die Anzahl der Luftschwingungen abzuändern. Wenn sie gespannt sind, vermindert sich ihre Höhe, und die Töne müssen höher werden, weil die die Luft einschliessenden Wände mehr Widerstand leisten und der dehnbare Theil derselben eine geringere Ausdehnung hat. Es ist zu bemerken, dass gleichzeitig mit dieser Wirkung die Oeffnung, durch welche die Luft aus der Luftröhre entweicht, gerade wird, und die äusseren Wände der Taschen eine grössere Steifheit bekommen, denn derselbe Muskel bewirkt alle diese Bewegungen. Es ver-

steht sich, dass die entgegengesetzte Wirkung eintritt, und die Töne tiefer werden, wenn die Falten an Spannung verlieren. Nach dieser Erklärung der Stimmorgane ist es klar, dass man der Stimme an ihrem Umfange nichts benimmt, sondern die tiefern Töne nur schwächer macht, wenn man die oberen Theile der Stimmröhre wegnimmt und nur die blossen Taschen übrig lässt.

Daraus erklärt es sich auch, dass man ähnliche Sectionen an lebenden Thieren vornehmen könnte, ohne ihnen die Fähigkeit, verschiedene Töne hervorzubringen, zu benehmen. Da die Luft in den Taschen unabhängig von der in der Luftröhre schwingen kann, so ist es sehr wahrscheinlich, dass gewisse Laute durch die Taschen allein hervorgebracht werden können, besonders solche, die der Schmerz auspresst, vielleicht auch die sogenannten Fisteltöne. Es scheint, es müsse dieses in jedem Falle Statt finden, wo die dehnbaren Theile der Stimmorgane nicht den Grad der Spannung annehmen können, der dem hervorzubringenden Ton entspricht. Dieses ist um so wahrscheinlicher, als es Thiere gibt, deren Stimmorgane nur aus Taschen bestehen, wie z. B. Frösche. Der Kehlkopf dieser Thiere gleicht sehr stark einer kleinen Pauke; die convexe Wand derselben ist knorpelig, nimmt den oberen Platz ein, und hat eine länglichte Mündung, die sich nach Belieben öffnen kann, die untere Wand ist häutig und zeigt eine ähnliche Oeffnung. Die Luft langt unter dieser Haut an, geht durch beide Oeffnungen und setzt die in der Höhlung befindliche Luft in Bewegung. Der Mechanismus gleicht den abgebildeten Instrumenten und den Taschen bei Menschen. Hätte das Thier

nebst diesem Organ ein conplicirteres Respirationssystem, so könnte es ungeachtet der so grossen Einfachheit des ersteren doch angenehme Laute hervorbringen.

Die Thatsachen, auf welche sich diese Erklärung der menschlichen Stimme gründet, können auch angewendet werden, um die Laute zu erklären, welche verschiedene Säugethiere von sich geben, deren Organe denen des Menschen ähnlich sind. Bei denen, welche knöcherne, mit den Taschen des Kehlkopfes verbundene Säcke haben, wie die Brülaffen, begreift man leicht, wie es kommt, dass die Luft, welche die Höhlungen enthalten, so tiefe Töne und so starke Laute erzeugen kann. Thiere, bei denen diese Säcke häutig sind, wie bei vielen Affen, müssen demnach starke, dumpfe und sehr tiefe Töne von sich geben können. Ich zeige diese Anwendungen nur an, und beschränke mich auf die Bemerkung, dass die sonderbarsten Einrichtungen der Stimmorgane verschiedener Thiere wahrscheinlich nach den hier angeführten Grundsätzen erklärt werden können.

III. Ueber das Wiederkennbarmachen der Inschriften auf Münzen und Medaillen von Brewster.

(The Edinburgh Journal of Science vol. 1.)

Man weiss seit langer Zeit, dass man an einer Münze, von welcher die Inschriften und Zeichnungen so verschwunden sind, dass man keine Spur eines Gepräges mehr an ihr erkennen kann, sowohl

die Inschriften als auch die Zeichnungen zum Theil oder gänzlich erkennbar machen kann, wenn man sie auf heisses Eisen legt. Thut man dieses mit einer abgeriebenen Münze, so sieht man, dass sich über die ganze Oberfläche eine Oxydation erstreckt und dass das Oxydhäutchen seine Farbe mit der Dauer und Intensität der Hitze ändert. Die Theile, wo sich Buchstaben befinden, oxydiren sich in einem anderem Grade, als die sie umgebenden so, dass die Buchstaben durch das Oxydhäutchen lesbar werden. Die Farben, welche die Zeichnung decken, sind oft sehr brillant, grün, bronzfarben und manchmal auch ins Dunkle spielend. Manchmal haftet die Farbe, welche die Zeichnung deckt so schwach, dass man sie durch leichtes Reiben mit dem Finger wegschaffen kann.

Wenn man den Versuch mit derselben Münze öfter wiederhohlt, und nach jedem Experimente das Oxyd wegschafft, so wird das Häutchen immer schwächer und endlich ganz unmerkbar; sie erlangt aber die vorige Eigenschaft wieder mit der Zeit.

Wenn man die Münze das erstemal auf heisses Eisen legt, wo die Oxydation am stärksten ist, steigt ein Dampf davon auf und verändert sich, so wie das Oxydhäutchen, bei öfterer Wiederhohlung des Versuches. Eine Münze, welche diesen Dampf nicht mehr von sich gibt, dampft wieder, nachdem sie etwa 12 Stunden der Luft ausgesetzt worden ist.

Bei einer grossen Anzahl von Versuchen fand ich, dass sich der erhabene Theil einer Münze, und bei neuen Münzen der erhabene Rand rings um die Inschrift zuerst oxydirt. So bekommt an einem engli-

chen Schillingstück von 1816 der Rand ein helles Gelb, bevor sich an den anderen Theilen eine Spur davon zeigt.

Bei der Untersuchung einer grossen Anzahl alter Münzen zeigte sich an einem oder an zwei Puncten derselben ein glänzend rothes Kügelchen, von Schwefelgeruch begleitet; manchmal schwitzten gar kleine Kügelchen, wie Quecksilberkügelchen, von der Oberfläche aus, andere hauchten einen unerträglichen Geruch aus und eine indische Pagode wurde ganz blass, als ich sie auf heisses Eisen legte.

Diese sind die allgemeinen Thatsachen in Betreff der Oxydation der Münzen, deren Erklärung gewiss interessant ist.

Nimmt man ein homogenes glattes Stück Silber und legt es auf heisses Eisen, so wird seine Oberfläche gleichförmig oxydirt, wenn alle Theile einer gleichen Hitze ausgesetzt sind. Eine Münze unterscheidet sich aber von einem Silberstück von gleichförmigem Gefüge darin, dass sie während des Ausmüntzens einen grossen Druck erlitt, wobei die vertieften Theile durch die Erhabenheiten des Stempels am meisten, die erhabenen Theile hingegen am wenigsten zusammengedrückt wurden. Es haben daher in einem Münzstück die Buchstaben und Figuren eine geringere Dichte als die anderen Theile, und oxydiren sich desshalb schneller und bei einer geringeren Temperatur als diese. Wenn auch die Erhabenheiten durch den Gebrauch abgenützt sind, so haben auch noch die unter ihnen befindlichen Theile eine geringere Dichte als das sie umgebende Metall, und nehmen daher in der Hitze einen anderen Oxydationsgrad und

eine andere Farbe an, als die sie umgebende Oberfläche. Daraus ersieht man, warum die abgenützten Buchstaben durch Oxydation wieder kennbar gemacht werden.

Eine ähnliche Wirkung findet bei der schönen Oxydation Statt, welche auf der Oberfläche des polirten Stahles hervorgebracht wird. Hat er harte Stellen, so hört in ihrer Nähe die Gleichförmigkeit der Farbe auf, und sie erscheinen immer anders gefärbt als die übrige Masse. Das Dampfen und die Verminderung der Oxydationsfähigkeit einer Münze bei der Wiederhohlung des Versuches scheint anzuzeigen, dass die weicheren Theile des Metalls etwas von der Luft einsaugen, das ihre Oxydation befördert. Ob dieses Oxygen sey oder nicht, bleibt zu bestimmen übrig.

IV. Ein sehr einfaches Instrument, um zu erkennen, ob ein Körper das Licht doppelt bricht oder nicht, von A. Baumgartner.

Die Eigenschaft der Körper, das Licht doppelt zu brechen, steht mit der Anordnung und nicht selten mit der Natur ihrer kleinsten Theile in so naher Verbindung, dass man oft von ihrem Daseyn auf die materielle Beschaffenheit der Körper schnell einen Schluss ziehen kann, zu dem man sonst nur mittelst mehrerer mühsam zu entdeckender Eigenschaften hätte gelangen können. So z. B. weiss man mit völliger Bestimmtheit, dass ein Stück eines Krystalls, welches das

Licht doppelt bricht, nicht in das sogenannte tessularische System gehöre, es mag durch Kunst oder Zufall in was immer für eine Form gebracht seyn, an der man nicht das mindeste ihrer ursprünglichen krystallinischen Structur mehr zu erkennen im Stande ist.

Bekanntlich würde ein Polarisationsinstrument am schnellsten zu dieser Kenntniss führen, allein die gewöhnlichen Instrumente dieser Art sind theils zu kostbar, theils auch zu voluminös, um sie zur Bestimmung der Einwirkung eines kleinen Körpers auf das Licht leicht und mit Bequemlichkeit brauchen oder sie den gewöhnlichen oryctognostischen Apparaten einverleiben zu können. Darum construirte ich das kleine und gar nicht kostspielige, Fig. 12 abgebildete Instrument, welches sehr leicht und schnell zum Ziele führt.

AB ist eine Röhre mit einer nach unten angebrachten Erweiterung, die als Fussgestell dient; darin befindet sich ein geschwärzter ebener Glasspiegel *C*, der gegen die Axe der Röhre unter 65° 35′ geneigt ist. An der Seite der Röhre ist eine kleine Oeffnung *D* anbracht, welche mit einem Turmalinplättchen verschlossen ist, das parallel mit der Axe eines reinen Turmalinkrystalles geschnitten ist, und eine solche Stellung hat, dass ein Lichtstrahl, der durch dasselbe geht und auf den Planspiegel fällt, von diesem nicht reflectirt, sondern absorbirt wird. In *E* ist obengenannte Röhre mit einer Sammellinse geschlossen, deren Brennweite grösser ist, als die Entfernung desjenigen Punctes des Spiegels von ihr, den ein senkrecht durch das Turmalinplättchen gehender Strahl trifft. Endlich ist seitwärts an der Röhre in gleicher Höhe mit dem Turmalinplättchen eine Oeffnung *F* angebracht.

Stellt man dieses Instrument so, dass das Turmalinplättchen einem Fenster oder einem anderen Körper gegenüber steht, der eine sattsame Beleuchtung gewährt, so wird man durch die Linse die Oeffnung, an der das Krystallplättchen angebracht ist, entweder gar nicht, oder nur sehr schwach im Spiegel wahrnehmen. Hält man nun einen Körper, dessen Wirkung auf das Licht man untersuchen will, mittelst einer kleinen Zange durch die Oeffnung *F* so in die Röhre, dass der Lichtstrahl, welcher das Krystallplättchen verlassen hat, erst durch ihn gehen muss, um den Spiegel treffen zu können, so wird die Oeffnung *D* eben so schwach mittelst der Linse gesehen werden, wie ohne den Körper oder gar noch schwächer, wenn dieser Körper, das Licht einfach bricht, hingegen wird diese Oeffnung viel heller erscheinen, wenn er die Eigenschaft besitzt, das Licht doppelt zu brechen. Um allem Irrthum vorzubeugen, muss man den zu prüfenden Körper, während er sich im Instrumente befindet, nach mehreren Richtungen drehen und wenden, und bei jeder Stellung desselben gegen den Spiegel beobachten, ob die Oeffnung heller erscheint oder nicht. Besonders ist dieses bei Körpern nöthig, die in abgerundeten Körnern vorkommen, wie dieses häufig bei sehr harten Krystallen der Fall ist; denn diese wirken nach einer Richtung wie eine Sammellinse und gewähren selbst bei einer einfachen Brechung des Lichtes eine kleine Vermehrung der Lichtstärke, nach anderen Richtungen zeigen sie dieses aber nicht, wie es doch der Fall seyn müsste, wenn sie das Licht doppelt zu brechen im Stande wären.

Bei vielen Krystallen ist man mittelst dieses Instrumentes auch im Stande, die Lage der Axe der doppelten Brechung des zu untersuchenden Körpers anzugeben: denn bei der Lage desselben, wo sich im Spiegel farbige ovale Ringe zeigen, ist immer die Axe der doppelten Brechung nur wenig gegen den Lichtstrahl geneigt, welcher durch den Krystall geht, und wenn diese Farbenringe gar kreisförmig sind, so kann man gewiss seyn, dass die Axe der doppelten Brechung eine zu dem einfallenden Strahl parallele Lage habe.

Es ist kaum nöthig anzuführen, dass dieses Instrument bei der Bestimmung mancher Edelsteine zur schnellen Entscheidung führen kann. So z. B. ist es oft schwer, den Saphir von einem farbigen Diamante zu unterscheiden, indem die Härtegrade beider nicht sehr von einander verschieden sind, und sich auch, besonders wenn das Stück klein ist, nur bei einem sehr genauen Verfahren ein Unterschied im specifischen Gewichte zeigt. Da aber der Diamant das Licht einfach, der Saphir hingegen doppelt bricht, so wird man auf einen Blick beide von einander durch ihre Wirkung auf das Licht unterscheiden können. Eben so erkennt man mittelst dieses Verhaltens augenblicklich die künstlichen Glasflüsse, deren manche einen sehr vollkommenen Glanz haben und ihrer netten Form wegen oft nicht gestatten, die Härteprobe anzuwenden, dass man versucht wird, sie für Edelsteine zu halten. Allein da das Glas nur in grösserer Masse durch schnelles Abkühlen die Eigenschaft erlangt, das Licht doppelt zu brechen, und grosse Glasstücke wohl nur von ganz Unwissenden für Edelsteine ge-

halten werden können; so ist man leicht im Stande, sie von allen denen zu unterscheiden, welche das Licht doppelt brechen, und diese machen bekanntlich bei weitem die Mehrzahl aus.

V. Neue Correctionen für die Wirkung der Feuchtigkeit in der Formel zum Behufe der Höhenmessung mittelst des Barometers von Adam Anderson, Rector der Akademie zu Perth.

(Edinburgh. Philosoph. Journal. Nr. 24 u. 26.)

Die Höhenmessungen mittelst des Barometers haben vor dem Nivelliren und der geometrischen Messung bei weitem den Vorzug. Es ist nur zu bedauern, dass man ungeachtet der vielen und feinen Correctionen, die man in der Formel anbrachte, mittelst der man die Höhe aus dem Barometerstande ableitet, bei verschiedenen Zuständen der Atmosphäre nicht zu demselben Resultate gelangt. Dieses kann man der Vernachlässigung eines wichtigen Elementes bei der Berechnung zuschreiben, nämlich der Feuchtigkeit der Luft. Man hat bis jetzt diese gar nicht geachtet, oder ihren Einfluss auf eine so allgemeine und unbestimmte Art in Rechnung gebracht, dass sie nicht auf Fälle anwendbar ist, wo der Feuchtigkeitszustand sich stark vom mittlern entfernet. Der neue Coefficient, den ich an der gewöhnlichen Höhenformel anbringe, wird gewiss manches aufklären, das bisher keine zureichende Erklärung fand, und alle von der Feuchtigkeit her-

rührenden Quellen der Irrthümer der barometrischen Höhenmessung beseitigen.

Correctionen für die Höhenformel.

Nimmt man die Luft als vollkommen elastisch, und von gleicher Temperatur durch ihre ganze Masse an, und drückt die Länge der Quecksilbersäule im Barometer an der untern und obern Station durch b und β aus, so wird der Höhenunterschied beider Stationen durch die Formel

$$h = m \log. \left(\frac{b}{\beta}\right)$$

ausgedrückt, wo m ein beständiger Coefficient ist, der durch einen Versuch oder mittelst des Verhältnisses zwischen dem specifischen Gewichte der Luft und des Quecksilbers bestimmt wird. Dieser in seiner Form so einfache, in seiner Anwendung so leichte Ausdruck muss zwei Correctionen bekommen, wegen der Abnahme der Temperatur nach oben; die eine bezieht sich auf die Länge der Quecksilbersäule, die in beiden Stationen auf einerlei Temperatur reducirt werden muss, die andere aber auf den Coefficienten m, welcher nach Verhältniss der Ausdehnung und Zusammenziehung der Luftsäule durch die Hitze oder Kälte dahin abgeändert werden muss, dass er für die wirkliche Temperatur passet, die höher oder tiefer ist, als jene, bei der m ursprünglich bestimmt wurde.

Die Länge der Quecksilbersäule in beiden Stationen muss in diejenige verwandelt werden, welche in der Voraussetzung einer gleichen Temperatur Statt finden würde, indem man die Länge der oberen auf

die Temperatur der unteren oder umgekehrt, oder gar beide auf eine gemeinschaftliche von der ursprünglichen beider verschiedene Temperatur reducirt. Uebrigens ist es einerlei, auf welche Temperatur man beide Quecksilbersäulen reduciren mag. Nimmt man die Temperatur der unteren Station als diejenige an, auf welche die Quecksilbersäule in der oberen reducirt wird, so wird aus obigem Ausdruck

$$h = m\log\left(\frac{b}{q\beta}\right).$$

wo q bloss vom Unterschiede der Temperatur des Quecksilbers in beiden Stationen, mithin von der Ausdehnung des Quecksilbers durch die Wärme abhängt. Ist T die Temperatur des Quecksilbers im Barometer der unteren Station, T' dieselbe in der oberen, beide nach Fahrenheit, so ist

$$q = 1 + 0{,}000102\,(T - T').*)$$

*) Bei dem Verfahren, das der Herr Verfasser anwendet, indem er die Queksilbersäule der oberen Station auf die Temperatur der Quecksilbersäule der unteren reducirt, begeht man einen kleinen Fehler, weil dem Ausdehnungs-Coefficienten 0,000102 als Einheit das Volumen bei der Temperatur des Aufthauungspunctes entspricht, nicht aber das bei der Temperatur T. Dass jedoch dieser Fehler nicht gross sey, ersieht man daraus, wenn man die Temperaturen beider Quecksilbersäulen auf 32° F reducirt. Ist nun q' der Correctionsfactor für b, q'' derjenige für β, so hat man eigentlich

$$h = m\log\left(\frac{q'b}{q''\beta}\right) = m\log\frac{b}{q\beta}$$

wenn man $\frac{q''}{q'} = q$ setzt.

Es ist aber $q' = 1 - 0.000102\,(T - 32)$ und

$$q'' = 1 - 0.000102\,(T' - 32)$$

$$q = \frac{q''}{q'} = \frac{1-0.000102(T'-32)}{1-0.000102(T-32)}$$

$$= 1+0.000102(T-T') + (0.000102)^2(T-T')(T-32)\text{etc.}$$

Die andere oben erwähnte Correction hängt von der Ausdehnung oder Zusammenziehung der Luft ab, die, je nachdem sich die Temperatur über oder unter der Normaltemperatur befindet, auf welche sich der Coefficient m bezieht, obige Formel auf

$$h = \text{mrlog} \left(\frac{b}{\beta\beta}\right)$$

bringt, wobei der Coefficient r so genommen werden muss, wie es die Ausdehnung der Luft mit dem gewöhnlichen Antheil von Dünsten verlangt. Aber die Dunstmenge, welche der Luft in verschiedenen Schichten beigemischt ist, ist zu verschiedenen Zeiten, und in verschiedenen Schichten sehr verschieden, es muss daher auch die Abweichung des Feuchtigkeitszustandes von dem, wo r bestimmt wurde, eine entsprechende Abweichung in der Höhendifferenz h hervorbringen. Sir Shuckburgh und General Roy haben gefunden, dass sich die atmosphärische Luft bei ihrem gewöhnlichen Feuchtigkeitszustande, um 000244 ihres Volumens für jeden Grad nach Fahrenheit ausdehnt, und dass, wenn die mittlere Temperatur in beiden Stationen 32° F ist, m = 10000 gesetzt werden muss, damit h den Höhenunterschied in englischen Fathoms gibt, es ist daher der Coefficient $r = 1 + 0{,}00244 \left(\frac{t + t'}{2} - 32\right)$, wo t und t′ die Lufttemperatur in beiden Stationen bedeuten, und die vollständige Höhenformel ist

$$h = 10{,}000 \left(1 + 0{,}00244 \left(\frac{t+t'}{2} - 32\right) \log \frac{b}{(1 + 0{,}000102(T - T')\beta}\right)$$

Ausser diesen Correctionen hat man noch zwei andere angegeben, deren eine von der Aenderung

der Scale des Barometers abhängt, welche durch die Variationen der Temperatur hervorgebracht wird, die anderen hingegen von der Aenderung der Schwere der Luft, bei einem Wechsel der örtlichen Lage. Allein die erstere ist bei dem geringen Wärmeunterschiede, der bei Höhenmessungen Statt haben kann, zu gering, und kann daher wohl vernachlässigt werden, die zweite ist eine subtile Rechnungsaufgabe, deren Resultate innerhalb der Grenzen der Genauigkeit anderer Daten des Problems liegen. Die Correctionen, welche ich angebe, um die Formel dem wahren Zustande der Luft in Rücksicht der Feuchtigkeit anzupassen, ist weit wichtiger.

Wenn sich die Dichte der Dünste in verschiedenen Höhen nach denselben Gesetzen richtete, wie die der Luft, in der sie schweben, so ist klar, dass ihre grössere oder kleinere Menge in obiger Formel gar keine Correction nöthig machte, in so fern diese Correction bloss vom Druck abhängt. Denn bedeuten b und β die Höhe beider Quecksilbersäulen in ganz trockener Luft, f und f′ hingegen die Elasticität des Dampfes in der oberen und unteren Station, so hat man

$$b : f = \beta : f'$$

$$b : b + f = \beta : \beta + f' \text{ d. i.}$$

$$\frac{b}{\beta} = \frac{b + f}{\beta + f'} \text{ und}$$

$$\log \frac{b}{\beta} = \log . \frac{b + f}{\beta + f'}.$$

Allein das Daseyn der Feuchtigkeit fordert selbst, wenn obige Voraussetzung gilt, eine Correction wegen der Ausdehnung der Luft, die sie hervorbringt, ein

Umstand, den man bisher ganz vernachlässigt hatte. Es ist aber auch obige Voraussetzung, dass die Dichte der Luft so abnimmt wie die der Dünste, nicht der Erfahrung gemäss; denn die Abnahme der Temperatur nach oben zu, das häufige Ausscheiden der Dünste gegen die Oberfläche der Erde, wodurch das Aufsteigen anderer beständig gehemmt wird, die eigene Gestalt der Luftsäulen, welche als pyramidal betrachtet werden können, deren gemeinschaftliche Spitze in der Erde Mittelpunct liegt, alles dieses zusammen bewirkt, dass die oberen Luftschichten sowohl absolut als relativ trockener seyn müssen als die, welche die Oberfläche des Oceans berühren. Ich habe anders wo (Edinburgh. Encyclop. Art. Hygrometrie Sec. 91) gezeigt, dass die absolute Feuchtigkeitsmenge der Luft in einer Höhe von 9500 F. die Hälfte von der an der Meeresfläche beträgt, und mehrere Beobachtungen, die ich unter günstigen Umständen von dem Fusse bis zum Gipfel des Beiglor, eines der höchsten Berge von Perthshire anstellte, überzeugten mich, dass die Linie der Feuchtigkeit eine logarithmische ist, und andere Beobachtungen bekräftigten dieses Resultat, welches um so genügender ist, als die absolute Feuchtigkeitsmenge in beiden Fällen sehr verschieden war. Betrachtet man, dass die Dichte der Luft in einer Höhe von etwa 18000 F. die Hälfte von der an der Oberfläche beträgt, während die Wasserdünste dieselbe Veränderung schon in einer Höhe von 4500 F. erleiden, so sieht man, dass der verschiedene Feuchtigkeitszustand zu verschiedenen Zeiten das Gesetz der Luftsäulen verschieden abändern, und eine Abweichung von der geometrischen Progression her-

vorbringen muss. Stellen a, ar, ar^2 etc. die Dichten der aufeinander folgenden Schichten trockener Luft vor, ν, $\nu\rho$, $\nu\rho^2$ etc. die der entsprechenden Dampfschichten, so sieht man, dass die Glieder, welche die Dichte der feuchten Luft angeben, nämlich $a + \nu$, $ar + \nu\rho$, $ar^2 + \nu\rho^2$, keine geometrische Progression mehr bilden.

Die Höhendifferenz, welche man aus der gewöhnlichen Formel ableitet, müsste die wahre Höhe um so mehr übertreffen, je grösser die in der Luft vorhandene Dunstmenge ist, weil die Elasticität der Dünste in der unteren Station einen grössern Einfluss auf die Höhe der Quecksilbersäule ausübt, als in der oberen, allein diesem widerspricht die Erfahrung, denn ich habe bei zahlreichen Beobachtungen gefunden, dass die nach der gewöhnlichen Formel berechneten Höhen desto mehr unter der wahren zurückbleiben, je wärmer und feuchter es ist. Die Ursache liegt in der durch die Dünste bewirkten Ausdehnung der Luft, welche dem Einflusse auf den Druck entgegen wirket, und oft diese Wirkung gar aufhebt, so dass das Gesetz der Abnahme der Dichte der Luft, gerade wie bei vollkommener Trockenheit derselben, ausfällt. Daher muss in obiger Formel ein neuer Coefficient angebracht werden, welcher eine Function der durch die Feuchtigkeit bewirkten Ausdehnung der Luft ist, und zum Theil von der absoluten Feuchtigkeit in beiden Stationen, zum Theil von der Temperatur der mittlern Luftsäule abhängt. Diese zwei Correctionen machen alle Differenzen verschwinden, welche bisher bei Höhenmessungen mit dem Barometer, die Personen von anerkannter Genauigkeit anstellten, Statt fanden; und die durch diese Correction modificirte Höhenformel gibt Resultate,

welche mit den durch das Nivelliren oder trigonometrische Messungen erhaltenen genau übereinstimmen, während de Luc's oder Laplaces Formel bei einer Höhe von 1000 F. manchmal eine Differenz von 40 — 50 F. gibt.

Spannkraft und Menge der Dünste in der Luft.

Um diese zwei Correctionen wegen der Feuchtigkeit anbringen zu können, muss man zuerst die absolute Elasticität der Wasserdünste genau erforschen, entweder indem man die Anzeigen eines genauen Hygrometers auf die entsprechende Spannung der Dünste reducirt, oder durch einen wirklichen Versuch die Temperatur erforscht, bei welcher sich der Dunst aus der Luft absetzt, wie Dalton empfiehlt. Die erste dieser zwei Methoden ist sehr mühsam und unsicher, denn das Gesetz, welches die Spannung der Dünste mit dem Hygrometergrade verbindet, ist nur für das Saussurr'sche Hygrometer genau untersucht, und da nur bei einer bestimmten Temperatur, so dass man es für eine andere Temperatur kaum wohl brauchen kann. Daltons Methode ist zwar einer grossen Präcision fähig, wenn man die Versuche mit Sorgfalt anstellt, aber nicht unter allen Umständen ausführbar; auch begegnet das Daniell'sche Hygrometer nicht allen dagegen gemachten Einwürfen *). Aber das Gesetz, an welches die Verdünstung des Wassers in einem ganz trockenen, oder nur zum Theil mit Wasserdunst er-

*) Körners vortreffliches Hygrometer ist dem Verfasser wahrscheinlich unbekannt.

füllten Mittel gebunden ist, setzt uns in den Stand, die Spannkraft der Wasserdünste genauer und einfacher zu finden, als dieses aus den Anzeigen eines Hygrometers geschehen kann, weil sie nicht so viel Rechnung fordert, um das Endresultat zu erhalten wie die Dalton'sche Methode. Weil das Wasser beim Uebergange in Dünste soviel Wärme absorbirt, dass, wäre es flüssig geblieben, dadurch seine Temperatur um 900° F. (500° C.) erhöhet worden wäre, so muss die Verdünstung seines 900ten Theils seine Temperatur um 1° F herabsetzen, falls ihm von der Umgebung keine Wärme zufliesst. Ist F die Spannkraft der Dünste für die Temperatur T des Mittels, worin sie sich bilden, f die der schon vorhandenen Dünste, so ist nach Dalton's Versuchen die in einer Zeiteinheit verdünstende Wassermenge dem Ausdrucke F — f proportionirt. Da nun die durch Verdünstung entstehende Kälte eine Function derselben Grösse ist, so hat man als erste Annäherungsgleichung

$$T - t = A(F - f) \qquad \text{(I.)}$$

wo t die von einem Thermometer angezeigte Temperatur, dessen Kugel mit feuchten Papier oder einer andern, die Feuchtigkeit einsaugenden Substanz bedeckt ist, und A einen durch Erfahrung bestimmten Coefficienten vorstellt. Ist die Linie, deren Coordinaten sich zu einander verhalten, wie sich die durch die Verdünstung erzeugte Kälte zur Spannkraft der Dünste verhält, eine Art parabolischer Linie, so kann man darauf die Gleichung

$$T - t = A(F - f) + B(F - f)^2 + C(F - f)^3 + \text{etc.}$$

anwenden. Da aber F — f innerhalb der Grenze, wo man hygrometrische Beobachtungen anstellt, nur ein

kleiner Bruch ist, so kann man die das Quadrat über steigenden Potenzen vernachlässigen und setzen:

$$T - t = A(F - f) + B(F - f)^2, \text{ d. i.}$$

$$f = F + \frac{A}{2B}\left(1 \mp \sqrt{\left(\frac{1 - 4B\delta}{A^2}\right)}\right), \text{ wenn man } T-t$$

$= \delta$ setzt. Aus der Natur der Aufgabe folgt, dass das Zeichen — allein gebraucht werden kann.

Will man A und B bestimmen, so muss man zwei Bedingungsgleichungen haben, in welchen F, f und δ bekannt sind. Ich habe gefunden $A = 34.75$ und $B = 3.11$, so dass man in obiger Gleichung erhält

$$f = F + 5.586(1 - \sqrt{(1 + 0.103\delta)})$$

Um dieses durch ein Beispiel zu erläutern, sey die Spannkraft des Wasserdunstes bei der Lufttemperatur von 60° zu suchen, wo das mit feuchtem Papier an der Kugel bedeckte Thermometer auf $51\frac{1}{2}$° zeigt.

Nach Dalton ist das Maximum der Spannkraft der Dünste bei 60° gleich $0,524 = F$, und $\delta = 60 - 51\frac{1}{2} = 8\frac{1}{2}$, mithin

$$f = 0,524 + 5.586(1 - \sqrt{(1 + 0.0103 \times 8.5)} = 0.285$$

Diesem gemäss wird die relative Spannkraft der Dünste in der Luft, oder das Verhältniss der bestehenden Spannung zum Maximum der Spannung für dieselbe Temperatur durch den Bruch $\frac{285}{524} = 0.5439$ ausgedrückt.

Um dieses Resultat mit der Spannung der Dünste vergleichen zu können, wie sie sich aus den von Dulong gemachten Versuchen für die Grade des de Luc'schen Hygrometers ergeben, beobachtete ich an einem solchen jüngst adjustirten Instrumente den Feuchtigkeitsgrad und fand ihn 35°. Nach Dulong's sorgfältig angestellten Versuchen entspricht dem Stande

von 31°,8 die Expansivkraft 0.4874, und dem Stande 37°,5 die Spannkraft 0,5912. Daraus ergibt sich durch Interpolation, dass die Spannkraft der Dünste, welche der Temperatur von 35° entspricht = 0.5456 ist, welches vom vorigen Resultate nur um 0.0017 abweicht. Da ich kein Saussur esches Hygrometer zur Hand hatte, so konnte ich obiges Resultat mit dem, welches sich aus der Vergleichung Biots zwischen der Spannung der Dünste und der Anzeige dieses Instrumentes ergibt, nur dadurch vergleichen, dass ich den Saussureschen Feuchtigkeitsgrad, welcher dem des de Luc'schen entspricht, aus einer genauen Vergleichung beider Instrumente abnahm. Nach de Luc's Resultaten entspricht 35° de Luc 75° Saussure und 37,5 jenes 84° dieses, mithin sind obige 35° mit 80° des Saussureschen Instrumentes übereinstimmend. Nimmt man aus diesen Resultaten das Mittel, so entprechen 35° de Luc 76°5 Saussure, welche nach Biot und Gay-Lussac die Spannung 0.5599 anzeigen. Dieses weicht vom obigen nur um 0,16 ab, ein Unterschied, der innerhalb der Grenzen der Abweichung beider Instrumente liegt. Aehnliche Uebereinstimmungen anderer Beobachtungen an einem gewöhnlichen Thermometer und einem, dessen Kugel mit befeuchtetem Papier bedeckt ist, zeigen, dass diese Formel für hinreichend genau angenommen werden kann, um den Feuchtigkeits-Zustand der Luft darzustellen. Es hat obiges Verfahren den Vorzug, dass es nicht vom Alter der Instrumente abhängt, wie bei den Hygrometern, die aus einer organischen Substanz bestehen, denn man braucht dazu nichts als Dalton's Tafel der Spannkräfte des Wasserdunstes und zwei gute Thermometer. Da

man aber obige Formel für zu verwickelt halten könnte, so will ich sie auf eine andere Form bringen, welche ohne Nachtheil für ihre Genauigkeit die Auflösung des Problems von einer einfachen Gleichung abhängig macht. Man setze desshalb statt

$$\delta = A(F - f) + B(F - f)^2$$

$$\delta = A(F - f) + B(F - f)(F - f),$$

und nehme für δ den aus der Gleichung (I.) abgeleiteten genäherten Werth $\delta = A(F - f)$ oder $\frac{\delta}{A} = F - f$, substituire diesen Werth in obiger Gleichung, so hat man

$$\delta = A(F - f) + \frac{B\delta}{A}(F - f), \text{ d. i.}$$

$$\delta = \left(A + \frac{B\delta}{A}\right)(F - f).$$

Um zu sehen, was für eine Aenderung δ bei einer Aenderung des Luftdruckes erleidet, brachte ich obige zwei Thermometer unter den Recipienten einer Luftpumpe, und fand bei verschiedenen Graden der Dichte der Luft ihre Differenz genau im verkehrten Verhältnisse mit der Dichte der Luft. Da nun die Coefficienten für einen Luftdruck von 30 Zoll gefunden waren, so hat man für den Druck b die Gleichung

$$\delta = \frac{30}{b}\left(A + \frac{\delta B}{A}\right)(F - f), \text{ und hieraus}$$

$$f = F - \frac{b\delta}{30\left(A + \frac{\delta B}{A}\right)}.$$

Zur Bestimmung der Coefficienten A und B sind zwei Gleichungen nöthig. Ich fand durch Vergleichung einer grossen Anzahl von Beobachtungen, die

bei sehr verschiedener Temperatur und Feuchtigkeit angestellt wurden A = 36, B = — 3,6, so dass man erhält:

$$f = F - \frac{b\delta}{30\left(36 - \frac{\delta}{10}\right)}, \text{ oder}$$

$$f = F - \frac{\frac{1}{6} b\delta}{180 - \frac{\delta}{2}}.$$

Dieser sehr einfache Ausdruck gibt nahe dieselbe Spannkraft der Dünste wie der vorige. Wendet man ihn auf obige Daten an, welche bei einem Luftdrucke von 30.4 Z. Statt fanden, so bekömmt man

$$f = 0.524 - \frac{\frac{1}{6} \times 30.4 \times 8.5.}{180 - \frac{8.5}{10}} = 0.524 - 0.240 = 0.284\ Z.,$$

ein Resultat, welches vom vorigen um 0.001 abweicht.

Kennt man einmal die Spannkraft der in der Luft befindlichen Dünste, so kann man leicht das Gewicht der in einem gegebenen Volumen atmosphärischer Luft enthaltenen Feuchtigkeit finden. Es sey φ die Spannkraft der Dünste in der Luft, nachdem sie von ihrer eigentlichen Temperatur t auf die Temperatur τ gebracht sind, bei welcher sie in tropfbaren Zustand überzugehen anfangen, so dass φ das Maximum der Spannkraft für die Temperatur τ ist. Nach Gay-Lussac dehnen sich die Dünste, so lange sie ausdehnsam sind, wie die Luft aus, nämlich für jeden Grad Fahrenheit um 0,002086 des Volumens bei 32 F. Wird daher der Dunst, dessen Spannkraft dem Maximum der Spannkraft φ für τ^0 gleich kömmt, auf die Temperatur t gebracht, so wird sie

$$\varphi\ (1 + 0.002086(t - \tau)) \text{ mithin ist}$$

$$f = \varphi\ (1 + 0.002086\ (t - \tau)) \text{ oder}$$

$$\varphi = \frac{f}{1 + 0.002086\ (t - \tau)}$$

Hier ist zwar τ unbekannt, jedoch kann man annäherungsweise annehmen, dass es der Temperatur, für welche f das Maximum der Spannkraft ausdrückt gleich kommt. Ist $f = 0.284$ $t = 60^0$, so beträgt nach Daltons Tafel $\tau = 42^0$, mithin wird

$$\varphi = \frac{0{,}284}{1 + 0{,}002086(60 - 42)} = \frac{0.284}{1.0375} = 0{,}274.$$

welches mit dem Maximum der Spannkraft für 41^0 übereinstimmt. Will man ein schärferes Resultat erlangen, so wiederhohlt man die Rechnung mit $\tau = 41^0$, wodurch man findet $\varphi = 0.273$. Da nun nach Gay-Lussacs Versuchen das Gewicht der Dünste $\frac{5}{8}$ von dem der Luft beträgt, und das Gewicht von 100 Kubikzollen Luft nach Arago und Biot am Frierpunct und bei einem Luftdruck von 30 Z. 32,9 englische Gran beträgt, so ist das Gewicht dieses Volumens Dünste bei der Temperatur τ und unter dem Drucke φ gleich

$$\frac{\frac{5}{8} \times 32{,}9 \cdot \varphi}{30(1 + 0.002086(\tau - 32))} = \frac{0.6854\ \varphi}{1 + 0.002086(\tau - 32)}.$$

Für $\varphi = 0.273$ und $\tau = 41^0$ erhält man 0.18367 G. als das Gewicht der Feuchtigkeit in 100 K. Zoll Luft, die bei 41^0 ganz mit Dünsten gesättiget ist.

Ist die wirkliche Lufttemperatur 60^0, so beträgt das Gewicht der Dunstmenge in 100 K. Zoll, welche durch Erwärmung von 41^0 auf 60^0 ausgedehnt wurde

$$= \frac{0.18367}{1 + 0.002086(60 - 41)} = 0.17671 \text{ Gran.}$$

Die Temperatur τ des sogenannten Bethauungs-

punctes (wo Daniells und Körners Hygrometer beschlagen zu werden anfängt). Diese Temperatur ist wesentlich von der verschieden, welche ein Thermometer zeigt, dessen Kugel befeuchtet ist. Im obigen Falle ist der Thaupunct 41°, während das Thermometer mit der befeuchteten Kugel $51\frac{1}{2}$ zeigt. Nach meiner Formel findet die grösste Differenz eines trockenen und eines Thermometers mit befeuchteter Kugel Statt, wenn $f = 0$ ist; in diesem Fall wird $F = \frac{\frac{1}{6}b\delta}{180 - \frac{1}{2}\delta}$

d. i. $\delta = \frac{1080\ F}{b + 3\ F}$. Bei ganz trockener Luft von der Temperatur 60° und einem Luftdruck von 30 Z. wird daher $\delta = \frac{1080 \times 0.524}{30 + 1.572} = 17.9$

Correction der Höhenformel wegen der Feuchtigkeit.

Die erste an der gewöhnlichen Höhenformel anzubringende Correction hat zum Gegenstande, den Druck in beiden Stationen auf den zu reduciren, der bei ganz trockener Luft Statt finden würde, so dass man statt des gewöhnlichen Coefficienten

$1 + 0.00244 \left(\frac{t + t'}{2} - 32\right)$ den aus der Ausdehnung ganz trockener Luft sich ergebenden

$$1 + 0.002086 \left(\frac{t + t'}{2} - 32\right) \text{ setzen kann.}$$

Es sey f die Spannkraft der Dünste der unteren Station, wo der Druck b Statt findet und f′ die der Dünste der oberen Station, wo der schon nach der Temperatur corrigirte Druck β herrscht. Das Gewicht

der Dünste ist $\frac{5}{8}$ von dem der trockenen Luft bei einerlei Druck, es verhält sich daher das Gewicht der Dünste zu dem der trockenen Luft, wie $\frac{5}{8}$ f : b. Da aber die Dichte der Dünste viermal schneller nach oben zu abnimmt, als die der trockenen Luft, so verhält sich das Gewicht der Dunstsäule, deren Spannkraft f ist, zu dem der trockenen Luft, wie $\frac{1}{4} \times \frac{5}{8}$f oder nahe wie $\frac{1}{6}$f : b. Es verhält sich daher das Gewicht der trockenen Luftsäule in der unteren Station zu derselben in ber oberen wie b — $\frac{1}{6}$f : β — $\frac{1}{6}$f′.

Die zweite viel wichtigere Correction, beruht auf der Ausdehnung der trockenen Luft durch Zusatz von Dünsten. Man wusste schon lange, dass sich feuchte Luft in einem mit Wasser gesperrten Recipienten durch die entstehenden Wasserdünste bei der Wärme in einem grössern Verhältniss ausdehnt als trockene. Gay-Lussac und Dalton haben auch bestimmt dargethan, dass die Elasticität einer Mischung von Luft und Dünsten, so lange letztere ihre Ausdehnsamkeit behalten, der vereinten Ausdehnsamkeit beider gleich ist. Stellt nun V ein gewisses Volumen trockener Luft bei einer bestimmten Temperatur und bei einem gegebenen Luftdrucke b vor, während f die Spannung der Wasserdünste bei derselben Temperatur bezeichnet, ist ferner V′ das durch Beimischung der Dünste vergrösserte Volumen der Luft bei demselben Drucke b, so ist die Elasticität der reinen Luft, die im verkehrten Verhältnisse mit dem Volumen steht $= \frac{bV}{V'}$. Gibt man nun Dünste von obiger Spannkraft f hinzu, so wird die Elasticität der Mi-

schung $= \frac{bV}{V'} + f$. Da aber diese Mischung unter dem Druck b steht, so hat man wieder $\frac{b \cdot V}{V'} + f = b$ d. i.

$$\frac{V'}{V} = \frac{b}{b-f}.$$

es verhält sich also das Volumen der feuchten Luft zu dem der trockenen wie $b : b - f$ oder wie $1 + \frac{b-f}{f} : 1$. Desshalb muss eine Luftsäule, welche Dünste von der Spannkraft f enthält, die Länge $1 + \frac{f}{b-f}$ bekommen, wenn sie im trockenen Zustande die Länge 1 hatte.

Diese Correction bringt man am zweckmässigsten so an, dass man statt f die mittlere Spannung der Dünste in der obern und untern Station, d. i. $\frac{f + f'}{2}$, und eben so statt b den mittlern Luftdruck, nämlich $\frac{b + \beta}{2}$ setzt. Man erhält daher

$$1 + \frac{\frac{f+f'}{2}}{\frac{b+\beta}{2} - \frac{f+f'}{2}} = 1 + \frac{f+f'}{b+\beta - (f+f')}.$$

Die vollständige Formel mit der von mir angebrachten und erwiesenen Correction hat eine kaum complicirtere Form als sie sonst hatte, während sie doch der veränderlichen Beschaffenheit der atmosphärischen Luft mehr angemessen ist. Heisst, wie früher, h der Höhenunterschied beider Stationen, so hat man

$$h = 10{,}000 \left(1 + 0.002086 \left(\frac{t + t'}{2} - 32\right)\right. \left(1 + \frac{f + f'}{b + \beta - (f + f')}\right) \log \left(\frac{b - \frac{1}{6}f}{\beta - \frac{1}{6}f'}\right)$$

wo t die Temperatur der Luft, f die Spannkraft der Dünste, b die Höhe der Quecksilbersäule bei der Temperatur T in der unteren Station ist, während t', f', b', T' dasselbe in der oberen Station bedeuten, und $\beta = (1 + 0.000102\,(T - T')$ ist.

Nimmt man statt des hier gebrauchten Coefficienten den aus dem Verhältnisse zwischen dem specifischen Gewichte der Luft und des Quecksilbers gefundenen, und wendet übrigens das Celsische Thermometer und Pariser Mass an, so bekommt man die Höhe in Pariser Fuss durch die Formel

$$h = 56566\left(1 + 0.00375\left(\frac{t + t'}{2}\right)\right)\left(1 + \frac{f + f'}{b + \beta - (f + f')}\right) \log\left(\frac{b - \frac{1}{6}f}{\beta - \frac{1}{6}f'}\right)$$

wobei $\beta = 1 + 0.00018\,(T - T')$ ist.

Der Verfasser lässt nun mehrere Höhenberechnungen folgen, die nach seiner Formel vorgenommen wurden, und verglich die Resultate mit den durch trigonometrische Messung oder durch Nivelliren gefundenen; die Vergleichung ist allerdings geeignet, obiger Höhenformel zur Empfehlung zu dienen. Ueberhaupt zeigt es sich dabei deutlich, dass die gewöhnliche Formel zur Bestimmung der Berghöhen mittelst des Barometers, in welcher man, der Feuchtigkeit wegen, den Coefficienten 0,002086 auf 0,00244 (oder wenn man sich eines Celsischen Thermometers bedient 0,00375 auf 0,004) erhöht, nur bei einem mittleren Feuchtigkeitszustande

der Luft hinlänglich genaue Resultate gibt, dass sie aber bei grosser oder gar geringer Feuchtigkeit keine hinreichende Genauigkeit gewährt.

VI. Höhenmessung mit *einem* Barometer nebst den dazu erforderlichen Tafeln von Nixon.

(Annals of phylosophy. January 1826.)

Gegenwärtiger Aufsatz enthält so viele wichtige Winke über einzelne Puncte, die man bei barometrischen Höhenmessungen zu beobachten hat, dass ich ihn für einen der unterrichtendsten über dieses Geschäft halte. Allein er ist an vielen Stellen etwas zu kurz gefasst und dunkel, und alle Zahlenwerthe beziehen sich nur auf englisches, für Deutsche immer etwas unbequemes Mass und auf Fahrenheits Thermometerscale, auch empfiehlt der Verfasser ausschliesslich das Barometer von Engelfield, das doch schon durch bessere verdrängt ist. Desshalb habe ich mir erlaubt, hie und da die Sache etwas weiter auseinander zu setzen, die Ordnung ein wenig abzuändern, das weniger Interessante wegzulassen, alle Zahlenwerthe auf das gangbarste, nämlich das französische Fussmass und auf hunderttheilige Wärmegrade zu reduciren, und eine auf jedes Barometer anwendbare Sprache einzuführen.

---

1. Man hat so selten bei einer Reihe barometrischer Beobachtungen einen verständigen Freund zum fortwährenden Begleiter, und kann doch ohne Wagestück nicht von Fremden die gehörige Sorge für Instrumente und Genauigkeit in der Beobachtung erwarten, dass besonders Geologen und Botaniker meistens genöthiget sind, bei ihren Höhenbestimmungen auf gleichzeitige Beobachtungen in zwei Stationen zu verzichten und den minder genauen und langweilige-

ren Weg einzuschlagen, mit einem Barometer die Sache abzuthun.

2. Zu diesem Behufe braucht man nebst einem guten Barometer und Thermometer auch noch ein leichtes dreifüssiges Gestell zum Aufhängen des Barometers, und als oft recht gelegenen Stellvertreter desselben einen eisernen Stab von etwa 12 Z. Länge, der an einem Ende hakenförmig gebogen, am anderen aber zugeschärft ist, um ihn in Spalten von Felsen, Mauern etc. hineintreiben zu können.

Bei vielen Gelegenheiten leistet auch ein etwa 12zölliges Fernrohr mit gehörig adjustirten Kreuzfäden und einer Wasserwage gute Dienste.

3. Da zur Bestimmung der Erhöhung eines Ortes über einen anderen die Kenntniss des gleichzeitigen Luftdruckes in beiden Stationen unerlässlich ist, und doch gleichzeitige Beobachtungen nicht angestellt werden können, so muss man zuerst die Barometerhöhe in der unteren Station beobachten und die Variation derselben, bis zur Zeit der Beobachtung in der oberen, durch Schätzung finden. Dieses geschieht dadurch, dass man in der unteren Station nach der Rückkehr von der oberen eine zweite Beobachtung des Luftdruckes anstellt, mittelst der zwischen beiden verflossenen Zeit die stündliche Aenderung desselben berechnet, und ihren Betrag bis zur Zeit der Beobachtung an der oberen Station zur ersten Barometerhöhe mit ihrem Zeichen (+ oder —) setzt. Ist es aber nicht thunlich, wieder in die untere Station zurückzukehren, so lässt man daselbst gleich auf die erste Beobachtung nach Verlauf einer Zeit, die wenigstens halb so lang ist als die, welche man braucht, um auf den obersten Punct zu ge-

langen, eine zweite folgen, und findet daraus die Variation des Luftdruckes durch Interpolation. Erreicht man aber die untere Station auf einem anderen Wege oder gelangt man in eine zweckmässige niedere Lage, so kann man auch diese Aenderung aus zwei oder mehreren innerhalb einer oder zwei Stunden angestellten Beobachtungen abnehmen. Nimmt man nun aus den Resultaten in beiden Plätzen das Mittel, so erhält man den gleichzeitigen Luftdruck in der Vergleichungsstation mit erträglicher Genauigkeit. Man muss aber zuvor die Barometerhöhen auf einerlei Temperatur reduciren. Am besten thut man, wenn man die Temperatur des Quecksilbers bei der ersten Beobachtung in der unteren Station als Normale annimmt.

4. Nun bleibt noch die Temperatur zu bestimmen übrig, welche in der unteren Station zur Zeit der Beobachtung in der oberen Statt fand. Diese kann nicht durch Interpoliren gefunden werden wie der Luftdruck, sondern man muss sie aus dem Gang der Wärme des Tages abnehmen.

Zu diesem Zwecke muss man in der Vergleichungsstation oder in einer anderen, welche dieselbe Erhöhung hat und unmittelbar an sie grenzt, die Temperaturen innerhalb kurzer Zwischenzeiten, nebst der Zeit, in welcher sie Statt fanden, in eine Tabelle verzeichnen lassen, die man von einem Thermometer abnimmt, welches in der Höhe des Auges vom Beobachter in einem nördlichen, dem Winde zugänglichen Orte befestiget ist. Kann man sich keine solche Tabelle machen lassen, so setzt man in der Höhenformel die doppelte Anzahl der Wärmegrade in der oberen Station für die Summe der Temperaturen in beiden Sta-

tionen und vermehrt dann die sich so ergebende Höhe um das Quadrat ihres 500. Theils. Uebersteigt der Höhenunterschied nicht 3500 F., so findet man die Zugabe in der fünften der folgenden Tafeln.

5. Alles dieses wird aber nur dann zu erträglich genauen Resultaten führen, wenn die Umstände den Beobachtungen des Luftdruckes und der Temperatur günstig sind. Obige Interpolationsmethode verlangt, wenn sie zu sicheren Resultaten führen soll, dass das Barometer völlig oder fast stationär sey und auf mittlerer Höhe für den gegebenen Platz stehe *). Bei diesem Zustande der Atmosphäre ist der Druck höchst wahrscheinlich in einer weiten Strecke bei derselben Höhe auch derselbe, und die Aenderung des Luftdruckes zwischen beiden Beobachtungen unbedeutend, ja was noch wichtiger ist, und unter anderen Umständen seltener eintrifft, fast gleichförmig. Nur da, wo die horizontale Entfernung beider Stationen gering ist, verdient die Zeit des grössten Luftdruckes den Vorzug, weil da die Dichte der Luft der des Quecksilbers am nächsten steht. Ferner sollen die Beobachtungen erst eine oder zwei Stunden nach Sonnenaufgang beginnen und wo möglich eben so lange vor Sonnenuntergang beendiget werden.

Was die günstigste Temperatur anbelangt, so scheint kaltes Wetter am zuträglichsten zu seyn, weil da die veränderliche Correction für die Feuchtigkeit unbedeutend und der Unterschied zwischen der Dichte

---

*) Man findet diese Höhe mit hinreichender Genauigkeit, wenn man zu der Barometerhöhe an der Meeresfläche, in Tausendtel der Zolle ausgedrückt, die Höhe des Ortes über dem Meere addirt.

der Luft und des Quecksilbers geringer ist; allein da die Barometer-Beobachtungen, mittelst welcher der Hauptcoefficient in der Höhenformel gefunden wurde, bei Temperaturen angestellt wurden, die etwas über den mittleren standen, so ist es wohl am klügsten, ruhige bewölkte Tage zu benützen, in denen das Thermometer zwischen 10° — 15° C steht.

Man muss möglichst die Zeit meiden, wo der Luftdruck gering, schwankend und stark veränderlich ist, wo starke und besonders veränderliche Winde herrschen oder das Wetter heiss und ungewöhnlich trocken oder feucht ist. Kalte Winde bei starkem Sonnenschein machen es unmöglich, die wahre Temperatur des Quecksilbers und der Luft zu erfahren, Extreme in der Temperatur sind, wenn sie im Verlaufe der Beobachtungen vorkommen, sehr unzuträglich.

An der Meeresfläche bleibt die Barometerhöhe bei allen Abwechslungen der Temperatur unverändert. Auf einer Anhöhe steigt und fällt die Quecksilbersäule bei jedem Zuwachs und bei jeder Abnahme der Temperatur, welche der unterhalb befindlichen Luftmasse zu Theil wird. Daher ist es unmöglich, die Aenderung des Luftdruckes auf einem hohen Standpuncte genau zu schätzen und unumgänglich nothwendig, wie immer der zu messende Höhenunterschied beschaffen seyn mag, das Barometer zuerst in der untersten benachbarten Station aufzustellen, um jenes Datum mit der erforderlichen Genauigkeit zu erhalten. Bei der darauf folgenden Berechnung muss man anfangs die Höhe der oberen Stationen über die unterste unmittelbar suchen, aus denen dann die relativen Höhen der

Zwischenstationen durch blosse Subtraction erhalten werden können.

6. Es bleibt nur noch zu zeigen übrig, wie die Beobachtungen angestellt und verzeichnet werden.

Beim Transport des Barometers halte man dasselbe stets in einiger Entfernung vom Körper, und wenn es thunlich ist, auf der Schattenseite, das obere Ende nach vorwärts gekehrt, ausgenommen beim Erklimmen steiler Abhänge, wo es sicherer ist, es rückwärts zu halten. Macht man Halt, so hüte man sich, es auf feuchten Boden, oder auf Felsen zu legen, die den Sonnenstrahlen ausgesetzt sind. Kommt man in der Station an, so errichte man den Dreifuss, drücke die Schenkel wohl in den Boden ein, oder wenn er zu fest ist, häufe schwere Steine um sie an. Ist eine Mauer, ein Fels, ein Baum etc. in der Nähe, so bediene man sich statt des Dreifusses des eisernen Hakens, und befestige ihn auf der Schattenseite, in rechter Höhe. Ist die Gegend ganz den directen Sonnenstrahlen ausgesetzt, oder die Schattenseite eines Felsen, einer Mauer etc. dem Winde so sehr Preis gegeben, dass man den Haken an der Sonnenseite befestigen muss, so ist es nothwendig, das Barometer durch einen Schenkel des Dreifusses, durch Rasenstücke, Steine etc., oder durch einen eigens dazu vorhandenen Schirm zu beschatten. Bei stürmischem Wetter hemmt man das Schwanken der Quecksilbersäule, indem man den unteren Theil des Barometers mit Erdschollen etc. umgibt, aber wohl darauf sieht, dass das Instrument seine verticale Lage beibehält.

Manchmal kann man wegen dem Ungestüm des Wetters weder vom Dreifuss noch vom Haken Ge-

brauch machen. Hat man nun einen Gehülfen und ein Fernrohr mit einem Fadenkreuze und einer Libelle bei der Hand, so kann man sich auf folgende Weise einen Platz zur sicheren Aufstellung des Barometers suchen: Es wird das Fernrohr mit der Libelle am obersten Puncte aufgestellt, der Beobachter steigt über den windwärts gelegenen Abhang des Berges so weit hinab, bis ihm der Gehülfe, welcher ihn mit dem Fernrohre verfolgt, ein Zeichen gibt, dass die Blase der Wasserwage auf die Mitte einspült, und das Kreuz im Fernrohre mit dem Auge des Beobachters einerlei Höhe hat. Auf den Platz, den der Beobachter unter diesen Umständen einnimmt, stellt man das Fernrohr von Neuem auf, wenn er noch nicht gegen den Wind hinlänglich gesichert seyn soll, und wiederhohlt dieses Verfahren so lange, bis man an einem sicheren Orte anlangt, wo man den Dreifuss oder den Haken befestigen kann. Multiplicirt man dann die Höhe des Auges des Beobachters über den Boden mit der Anzahl der vorgenommenen Nivellirungen, so erhält man die ganze Höhe, um die man hinabgestiegen ist. Ist der Bergrücken eine ausgedehnte Ebene, so kann sich der Beobachter auf einen Fels oder einen Damm setzen, das Barometer zwischen den Knieen halten, und ihm eine auf irgend einen fernen Bergrücken oder eine andere horizontale Ebene senkrechte Lage geben. Sucht man durch Neigen des Barometers die Stellung, bei der es am tiefsten steht, so hat man die auf den Horizont senkrechte Lage desselben gefunden.

Befindet sich die Oberfläche des Quecksilbers im kürzeren Schenkel nicht in einerlei Höhe mit der Sta-

tion, so muss man dieses in Rechnung bringen, und im Tagebuche anmerken. Beträgt dieser Höhenunterschied nicht mehr als 5—6 Fuss, so entspricht jedem Fuss nahe 0,001 Zoll der Höhe der Quecksilbersäule; man muss daher für jeden Fuss, um den das Barometer tiefer oder höher hängt, als der oberste Punct der Station, die beobachtete Barometerhöhe um 0,001 Z. vermehren oder vermindern.

Wenn das Instrument sicher am Dreifuss oder am Haken aufgehängt ist, öffne man den geschlossenen Schenkel desselben und klopfe sanft an dessen Seite. Nach Verlauf von 15 Minuten bei trübem Wetter, aber erst nach einer doppelt so langen Zeit bei starkem Sonnenschein merke man den Stand des am Barometer befindlichen Thermometers an, lege dieses Instrument (wenn es nicht unveränderlich mit dem Barometer verbunden ist, widrigenfalls man nebst diesem noch ein anders zur Hand haben müsste) an einen beschatteten, der freien Luft, aber nicht einem partiellen Luftstrom ausgesetzten Ort, der sich 5 oder 6 Fuss über dem Boden befindet und nicht kurz vorher von directen Sonnenstrahlen getroffen wurde, auch nicht besonders feucht ist. Nun stellt man den Nonius an der Scale des Barometers gehörig ein, bemerkt, nachdem dieses geschehen ist, die Temperatur der Luft und gleich darauf die Höhe der Quecksilbersäule im Barometer nebst der Zeit dieser Beobachtung.

7. Hat man alle erforderlichen Beobachtungen an der obersten Station gemacht, so kann man beim Hinabgehen in die untere Station die Höhe einiger umliegender Berge nach folgender Methode messen: Man wähle sich den höchsten sichtbaren Gegenstand aus,

den man messen will, richte von Zeit zu Zeit das Fernrohr so auf ihn, dass sein Gipfel in den Durchschnittspunct der Kreuzfäden liegt. Hat man den Ort erreicht, wo bei der genannten Richtung des Fernrohres die Blase der Libelle den mittleren Platz einnimmt, so stelle man es da fest auf, und ändere seine Höhe so lange, bis der Durchschnittspunct der Kreuzfäden im Fernrohre den höchsten Punct des genannten Berges trifft, und zugleich die Blase der Wasserwage gehörig einspielt.

Hier wird das Barometer aufgestellt, die zur Bestimmung der Höhe nöthigen Beobachtungen gemacht, und dabei auf die Höhe der Unterlage über der Oberfläche des Quecksilbers im kürzeren Schenkel (nach 6) die gehörige Rücksicht genommen. Mittelst dieser Daten, verbunden mit denen an der Vergleichungs-Station, lernt man durch Rechnung die Höhe der Wasserwage über letztere kennen. Vermehrt man diesen Höhenunterschied um das Product aus dem Quadrate der Entfernung des beobachteten Berggipfels, von der Wasserwage in Meilen ausgedrückt, in die Zahl 11.44 *),

---

*) Die bekannte Formel, welche die Correction wegen der Krümmung der Erde darstellt; ist für eine geringe Entfernung $\frac{a^2}{2r}$, wo a die Länge des zwischen beiden Orten gelegenen grössten Kreisbogens und r den Halbmesser der Erde darstellt. Ist nun φ der Winkel, welchen die zu beiden Endpuncten gehörigen Erdhalbmesser in der Erde Mittelpunct machen, so hat man annäherungsweise

$$\frac{a^2}{2r} = a \tan \frac{\varphi}{2}.$$

Setzt man aber auf Rechnung der irdischen Refraction $\frac{1}{16}$ des Bogens φ, so wird aus obiger Correction folgende:

so erhält man dadurch die Höhe dieses Gegenstandes über die Vergleichungsstation.

Wenn das Fernrohr klein ist, und die horizontale Distanz aus Landkarten abgenommen werden muss, so soll man diese Methode nicht auf Berge anwenden, deren Entfernung grösser ist, als zwei oder drei Meilen.

(Die Fortsetzung folgt.)

VII. Ueber die Bewegung des magnetischen Aequators der Erde.

(Aus dem Berichte Arago's über die in den Jahren 1822 — 1825 unter dem Commando des Herrn Duperrey unternommene Entdeckungsreise. Annales de Chimie et de Physique. Decemb. 1825.)

Es ist bekannt, dass es auf der Erde eine krumme Linie gibt, über welcher eine Magnetnadel keine Neigung hat, und die man magnetischen Aequator nennt. **Hansteen** und **Morlet** haben die Lage dieser Curve auszumitteln gesucht, sind aber, wie-

---

$$\frac{a^2}{2r} = a \operatorname{tang} \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{15} \right).$$

Für eine andere Entfernung A bekommt man auf gleiche Weise für den Werth der Correction

$$x = \frac{A^2}{2r} \text{ mithin}$$

$$a^2 : A^2 = a \operatorname{tang} \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{15} \right) : x$$

$$\text{oder } x = \frac{A^2}{a} \operatorname{tang} \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{15} \right).$$

Setzt man a = 1 Meile = 22816 Fuss, so wird φ = 4′ x = 11. 44. × A².

wohl sie von denselben Daten ausgingen, doch auf nicht ganz übereinstimmende Resultate gekommen. Vorzüglich weichen beide darin von einander ab, dass der mag. Aequator nach Morlet in der ö. Länge von 174°, nach Hansteen in der östl. Länge von 187° den Erdäquator einmal schneidet, und dass er nach Hansteen im Südmeere zwei Knoten bildet, statt deren Morlet nur eine Berührung beider Curven annimmt.

Indess ist die Abweichung beider Annahmen von einander nicht so gross, als es im ersten Augenblicke scheint, denn auch nach Hansteen weicht der mag. Aequator nur etwa 1°$\frac{1}{2}$ vom Erdäquator an der Stelle ab, wo Morlet die Berührung annimmt. Beide Gelehrte bestimmten aber den mag. Aequator für das Jahr 1780, und die Frage, ob sich seit dieser Zeit die Gestalt der Linie ohne Neigung oder ob sich ihre Knoten geändert haben, ist wohl aller Aufmerksamkeit werth. Die Arbeiten Duperrey's in Verbindung mit denen von Freycinet können hierüber Aufschluss geben. Duperrey hat den mag. Aequator auf seiner Reise sechsmal durchschnitten und zwar an Puncten, denen folgende Coordinaten entsprechen:

I.	27° 19′ 21″	westl. Länge,	12° 27′ 11″	südl. Br.
II.	14° 20′ 15″	- - -	9° 45′ 0″	- -
III.	83° 38′ —	- - -	7° 45′ —	- -
IV.	85° 46′ —	- - -	6° 18′ —	- -
V.	170° 37′ 24″	östl. Länge	0° 53′ —	nördl. Breite
VI.	145° 2′ 38″	- - -	7° 0′ —	- - - - -

Vergleicht man I. und II. mit Morlets Karte, in welcher die Breite des mag. Aequators in der west. Länge von 27°$\frac{1}{4}$ und 14°$\frac{1}{3}$ gleich ist 14° 10′ und

11° 36′, so findet man, dass sich der Punct des mag. Aequators, welcher 1780 im Meridian von 27°¼ lag, dem Erdäquator um 1° 43′ genähert habe, der im Meridian von 14°⅓ liegende hingegen um 1° 51′. Etwas ähnliches gibt Hansteens Charte. Dieselben Charten geben für die Längen III. nnd IV. etwa um einen Grad kleinere Breiten, so dass man hier eine entgegengesetzte Bewegung, d. i. eine Entfernung des mag. Aequators vom Erdäquator annehmen müsste. Dasselbe zeigt auch eine Vergleichung der Puncte V und VI. mit der für 1780 entworfenen Charte. Diese scheinbar so widersprechenden Variationen lassen sich erklären, ohne dass man eine Aenderung in der Form des mag. Aequators anzunehmen braucht, wenn man nur eine Bewegung dieser Curve voraussetzt, vermög welcher sie im Ganzen von Jahr zu Jahr von Ost nach West fortschreitet. Soll man aus dieser Voraussetzung obige numerische Werthe ableiten können, so muss die Bewegung vom Jahr 1780 bis zur gegenwärtigen Zeit von der Grösse von 10° angenommen werden. Die Schnelligkeit dieser Bewegung kann nicht gegen obige Annahme sprechen, denn directe Beobachtungen über die Lage der Knoten führen beinahe zu denselben Resultaten. Duperrey traf einen Knoten in 172° östl. L. und in Hansteens Charte fällt er in 184°, im Südmeere nimmt Hansteen 2 Knoten zwischen 108° und 126° w. L. an, und nach Freycinets sehr genauen Beobachtungen liegt dieser Knoten in 132° L. Sabine führt in einem erst vor kurzem erschienenen Werke an, dass der Durchschnittspunct beider Aequatoren, der sich 1780 im Innern von

Afrika weit von der Küste befand, nun bis in den atlantischen Ocean vorgerückt ist, und zwar beträgt diese Vorrückung von 1780 bis 1822 wenigstens 8°. Nach allen diesem ist die fortschreitende Bewegung des mag. Aequators sehr wahrscheinlich. Diese Bewegung hat schon Morlet vermuthet, die auf Freycinet und Duperreys Reise gemachten Beobachtungen geben hinreichende Thatsachen, um sich von ihrer Gewissheit zu überzeugen. Es scheint auch, als wenn die Variationen in der Richtung einer Magnetnadel durch die Form und Lage des mag. Aequators bestimmt würde, wie auch schon Morlet vermuthete. Nimmt man an, der Bogen des magnetischen Meridianes eines Ortes, als grösster Kreis betrachtet, welcher zwischen dem Orte und dem mag. Aequator liegt, sey das Mass der magnetischen Breite dieses Ortes, so findet man im Allgemeinen nach Morlet, dass die Neigung der Magnetnadel da abnimmt, wo durch die Bewegung des mag. Aequators die magnetische Breite vermindert wird, und im Gegentheil wächst, wo diese Breite grösser wird. Morlet glaubte aber Neuholland, Teneriffa etc. machen von dieser Regel eine Ausnahme, aber nach den durch Freycinet und Duperrey bekannt gewordenen Thatsachen kann man die allgemeine Gültigkeit dieser Regel nachweisen. So sieht man, dass die südliche Neigung in St. Helena schnell zunimmt, in Ascension hingegen die nördliche Neigung schnell kleiner wird, weil sich der mag. Aequator vom erstern Orte stark entfernt, dem zweiten hingegen sich stark nähert und ihn bald erreichen wird. Der durch das Kap gehende, gegen Norden verlängerte magne-

tische Meridian geht nahe an der Westseite eines Knoten vorbei, daher muss dort auch die Neigung schnell wachsen, dieses zeigen auch die Beobachtungen von Cook, Bayly, King, Vancouver und Freycinet. In Tahaite fand man in den Jahren 1773, 1774 und 1777 die Neigung der Magnetnadel 30°, Duperrey fand sie 30° 36′, es ist also daselbst die jährliche Variation sehr gering, aber der magnetische Meridian dieser Insel begegnet auch der Linie ohne Neigung fast im Puncte ihrer grössten Breite, d. i. dort, wo sie fast mit dem Erdäquator parallel ist. Es bleibt nun noch übrig zu zeigen, dass auch die Aenderungen der mag. Abweichung mit der Lage des mag. Aequators zusammen hängen, wozu Freycinet und Duperrey alle Daten in der Hand haben. Eine Vergleichung der Beobachtungen dieser Officiere mit denen von Cook und Vancouver zeigt, dass die Abweichung in Tahaiti südlich von beiden Aequatoren und in den Sandwichsinseln in einer nördlichen Breite jetzt eben so wenig veränderlich ist als die Neigung.

Aus Freycinets Beobachtungen hat sich unbezweifelbar ergeben, dass die täglichen Variationen der magnetischen Abweichung zwischen den Wendekreisen kleiner sind als bei uns, es schien auch, als könnte man aus ihnen die Folgerung ziehen, dass sich in der südlichen Halbkugel, das Nordende einer Magnetnadel, ihre Abweichung mag östlich oder westlich seyn, in denselben Stunden gegen Ost bewege, in welchen wir sie in Europa gegen West gehen sehen, woraus Freycinet schloss, dass es Orte geben muss, wo die Abweichung gar keiner täglichen Variation unter-

liegt. Es blieb nun noch übrig zu bestimmen, ob diese Puncte im magnetischen oder im geographischen Aequator liegen. Letzteres kann nicht der Fall seyn, weil zu Rawack (0° 1½′ südl. Breite) eine tägliche Variation von 3—4 Minuten Statt findet. Man musste aber doch, um jede Ungewissheit auszuschliessen, noch innerhalb beider Aequatoren Betrachtungen anstellen. Dieses that Duperrey zu Payta südlich vom geogr. und nördlich vom mag. Aequator und fand, dass sich daselbst das Nordende der Magnetnadel wie in Europa von 8 Uhr früh bis Mittag von Ost gegen West bewegt. Diese Ablenkung ist zwar sehr klein, aber da über ihre Richtung kein Zweifel übrig blieb, so schien sie den Schluss zu rechtfertigen, dass es längs des mag. Aequators keine täglichen Variationen der Abweichung gebe. Doch haben anderwärts angestellte Beobachtungen wie z. B. an der Insel Ascension diesen Schluss nicht begünstiget, und es scheint dieses Phänomen überhaupt verwickelter zu seyn, als man anfangs glauben mag.

VIII. Einige verbesserte Instrumente.

1. Buntens Heber.

(Edinburgh Journal of Science vol. I. p. 343.)

Dieses Instrument stellt Fig. 13 vor. Es unterscheidet sich von einem gewöhnlichen Heber dadurch, dass es am oberen Theile des längeren Schenkels eine kugelförmige Erweiterung hat. Füllt man diesen Arm nebst der Erweiterung mit der Flüssigkeit an, die man

mittelst des Hebers überfüllen will, kehrt den Apparat um, und stellt ihn mit dem kürzeren Schenkel in dieselbe, so beginnt die Heberwirkung, ohne dass man zu saugen braucht.

2. Hempels Heber.

(Journal de Pharmacie. April 1824.)

Dieses von einem Berliner angegebene Instrument lässt sich noch leichter behandeln als das vorige. Es ist wie ein ganz gemeiner Heber (Fig. 14) gebaut, nur mit dem Unterschiede, dass man an den kürzeren Schenkel eine unten gekrümmte, oben trichterförmig erweiterte Röhre ansetzen, aber sie auch wieder wegnehmen kann. Taucht man den kürzeren Arm, nachdem die Hülfsröhre angesetzt worden ist, in die zu hebende Flüssigkeit, füllt durch den Trichter von derselben Flüssigkeit so viel ein, bis sie durch den längeren Arm herausfliesst, nimmt dann die Hülfsröhre weg, so beginnt der Ausfluss der zu hebenden Masse.

3. Eine andere Einrichtung des Hebers.

Denkt man sich die Hülfsröhre in Hempels Heber am längeren Arme unveränderlich befestigt, und unten mit einer kleinen Oeffnung a (Fig. 15) versehen, so erhält man einen in vielen Fällen sehr brauchbaren Heber. Taucht man das kürzere Ende in die zu hebende Flüssigkeit, hält die kleine Oeffnung a zu, füllt durch den Trichter so viel von derselben Masse ein, bis der kürzere Arm fast voll ist, lässt dann a frei, so fliesst zuerst diese Masse heraus, und ihr folgt ohne Unterbrechung die zu hebende.

4. Chevalliers camera obscura mit meniskusförmigem Prisma.

(Annales de l'industrie nationale et étranger. October 1825.)

Chevallier hat im Jahre 1819 der Société d' encouragement ein Prisma mit einer convexen Seite übergeben, das die Dienste einer camera obscura leistet, und Hachette, der darüber Bericht zu erstatten hatte, legte ihm als besondern Vorzug vor den gewöhnlichen Instrumenten dieser Art bei, dass es lebhaftere und reinere Bilder gibt, von dem Nachtheile frei ist, den die Brechung des Lichtes an der vorderen Seite eines Glasspiegels nach sich zieht, dauerhafter ist, als ein mit Zinnfolio belegter Spiegel, der häufig durch den Einfluss der Feuchtigkeit und anderer zufälliger Ursachen leidet, den Zeichner weniger ermüdet, und endlich wohlfeiler ist, indem ein solches Prisma nur 15 Franken kostet, während eine Linse nebst dem Spiegel gewiss den dreifachen Preis hat, weil es so schwer ist, gute Planspiegel zu machen, selbst wenn sie nur klein sind.

Seit dieser Zeit hat Chevallier sein convexes Prisma durch ein meniskusförmiges ersetzt, und dadurch nebst obigen Vortheilen noch den erreicht, dass die Bilder von der Aberration frei, und an allen Theilen gleich rein sind

Mittelst dieses Prisma soll man Gemählde, Zeichnungen, selbst Portraite und die complicirtesten Maschinen in jedem Grade der Verjüngung nachzeichnen können, so dass dadurch ein Pantograph ganz entbehrlich wird.

Das meniskusförmige Prisma hat drei ebene Sei-

ten und zwei gekrümmte, von denen eine convex, die andere concav ist. Fig. 16 stellt es in einer Lage dar, wo man die zwei krummen Seiten und die grössere ebene sieht. Beim Gebrauche sieht die convexe Seite nach dem Objecte hin, und die concave nach dem Papier, auf dem man es nachzeichnen will. Die vom Objecte auf die convexe Seite fallenden Strahlen werden daselbst wie in einer Linse gebrochen, gelangen auf die grosse ebene Seite des Prisma, erleiden daselbst eine Reflexion, treffen dann die concave Seite, werden da wieder gebrochen, und geben so ausserhalb des Glases ein Bild auf dem Papier, das gezeichnet werden kann.

Fig. 17 und 18 zeigen dieses Instrument nach zwei auf einander senkrechten Richtungen. Es sind A Schrauben, wodurch man dem Prisma die gehörige Richtung gibt, B das Prisma selbst, C die Fassung, auf dessen Boden das Bild erscheint.

5. Ritchie's neues Photometer.

(Philosophical transact. of the royal society of London. 1825. p. 1.)

Dieses Instrument ist Fig. 19 abgebildet. Es besteht aus 2 Cylindern AB und CD, die mit Zinnfolio belegt sind, und wovon jeder 2 bis 10 oder 12 Zoll Durchmesser und ¼ oder 1 Z. Höhe hat, auf einer Seite mit einer Zinnplatte, auf der anderen mittelst einer wohl polirten Glasplatte luftdicht geschlossen ist, dass dadurch 2 hohle Cylinder gebildet werden. Diese bekommen eine solche Stellung, dass ihre ebenen Flächen mit einander genau parallel und die Metallböden einander zugekehrt sind; sie werden mittelst Glasstangen in dieser Stellung erhalten. Der innere Raum je-

des Cylinders enthält eine kreisförmige Scheibe von schwarzem Papier; beide stehen mit einander mittelst einer U förmig gebogenen Glasröhre in Verbindung, die mit Karmin gefärbte Schwefelsäure enthält, am oberen Theile jedes Armes eine kleine Kugel hat und, um die Bewegung der Flüssigkeit beurtheilen zu können, mit einer Scale versehen ist. Das Ganze befindet sich auf einem verticalen Fussgestelle. Um zu sehen, ob das Instrument gehörig regulirt ist, stelle man der ebenen Glasplatte jeder der 2 Cylinder eine brennende Kerze gegenüber und ändere ihre Entfernung so lange, bis die Flüssigkeit in beiden Armen der Glasröhre auf o weiset; dreht man nun das Instrument um 180° um eine verticale Axe, damit die von einem Lichte beschienene Glasplatte nun von der andern beschienen werde, und es ändert sich der Stand der Flüssigkeit nicht, so ist alles gehörig construirt.

Die Theorie und der Gebrauch dieses Apparates ist nun sehr einleuchtend: Stellt man eine Glasdecke einem leuchtenden Körper gegenüber, so sendet er Wärme- und Lichtstrahlen zugleich auf sie. Erstere werden vom Glase zurückgehalten, die letzteren gelangen ins Innere des Cylinders, treffen das schwarze Papier, werden daselbst ihrer Leuchtkraft beraubt und in dunkle Wärmestrahlen umgewandelt, die nun nicht durch das Glas den Cylinder verlassen können, sondern die innere Luft erwärmen, sie ausdehnen, und dadurch die flüssige Säule in Bewegung setzen.

Will man die Leuchtkraft zweier Körper mit einander vergleichen, so muss man jeden derselben einer der beiden Glasflächen gegenüber stellen, und ihre Entfernungen so lange abändern, bis die Flüssigkeit

ihren ersten Stand in der Glasröhre unverändert behält, in welchem Falle sich die Leuchtkräfte verkehrt wie die Quadrate ihrer Entfernungen verhalten. Ritchie behauptet, eine brennende Kerze, die vom Cylinder 10, 20 bis 30 F. entfernt ist, bringe eine Bewegung der Flüssigkeit hervor, während ein erhitztes aber nicht leuchtendes Eisen, das zwanzigmal mehr Wärme von sich gibt, als die Kerze, darauf keinen Einfluss äussert. Er hofft mit einem solchen Instrument, wobei die Cylinder 2 F. im Durchmesser halten, die Wärme der Mondesstrahlen bestimmen zu können. Dieses Instrument ist im Grunde nur ein im grösseren Massstabe ausführbares Leslie'sches Differenzialthermometer.

IX. Fortschritte der Physik in der neueren Zeit.

Seit die Naturlehre den von Baco empfohlenen Weg der Erfahrung ernstlich eingeschlagen hat, ist sie zur Riesinn herangewachsen und die grösste Wohlthäterinn des Menschengeschlechtes geworden. Wiewohl sie in der neueren Zeit den Kampf noch einmal zu bestehen hatte, den sie im grauen Alterthume kämpfte und durch dessen siegreichen Ausgang sie erst zur selbstständigen Wissenschaft ward, indem sie sich von der bloss speculirenden Philosophie losriss, so hatte dieses doch nur die Folge, dass man ihre Eigenthümlichkeiten recht klar erkannte und sich die unerschütterliche Ueberzeugung gewann, nur die Erfahrung, begleitet von einer nüchternen Urtheilskraft,

und an der Hand der allmächtigen Herrscherinn, der Mathematik, könne sie jenem Ziele immer näher führen, das vielleicht in keinem Zweige des menschlichen Wissens je ganz erreicht wird. In dieser Ueberzeugung bearbeiten nun die thätigsten und geistreichsten Männer das endlose Feld der Natur, und täglich mehren sich unsere Kenntnisse und die Zahl derer, welche an der Arbeit Theil nehmen oder doch die Früchte derselben kennen lernen wollen. Für letztere insbesondere ist gegenwärtiger fortlaufende Artikel bestimmt, in dém weder eine streng chronologische noch wissenschaftliche Folge der Fortschritte der Naturlehre beobachtet werden kann, sondern der die einen Gegenstand betreffenden Erweiterungen zusammenstellt, alle in das Gebiet der Physik gehörige Gegenstände nach der Reihe betrachtet und, nachdem dieses Gebiet einmal durchwandert ist, wieder zum ersten Puncte zurückkehrt, um an den früher verlassenen Faden das neue abermals anzuknüpfen.

Versuche über Festigkeit und Elasticität nebst den daraus sich ergebenden Resultaten.

Die Grösse des Zusammenhanges fester Körper hat von jeher für viele Physiker ein grosses Interesse gehabt, und es ist bekannt, dass es weder an älteren noch an neueren Versuchen über diesen Punct mangelt. In der neueren Zeit ist vorzüglich das Eisen in dieser Hinsicht und zugleich in Bezug auf Elasticität näher untersucht worden, weil dessen Anwendung in der Architectur sehr um sich griff.

Bei den besten Versuchen dieser Art hat man

sich vorzüglich mit der Beantwortung folgender Fragen beschäftiget:

1. Wie viel Gewicht trägt ein auf bestimmte Art geformtes Stück ohne merkliche Aenderung seiner Dimensionen?

2. Wie gross ist die Aenderung der Dimensionen, die es innerhalb der Grenzen seiner vollkommenen Elasticität durch eine bestimmte Last erleidet und wie gross ist der Modulus seiner Elasticität? ein Ausdruck, den Young *) zuerst einführte, und unter dem man die Last versteht, die sich zu derjenigen, wodurch ein Körper um das Stück a comprimirt wird, so verhält, wie die ganze Länge desselben zu der Länge des Stückes a.

3. Welche Last kann es ohne Verlust eines Theils seiner Elasticität ertragen, d. i. nach deren Wegnahme keine Spur einer Formänderung mehr bemerklich ist? 4. Mit welcher Belastung wird es zerrissen, gebrochen, zerdrückt oder zerstossen? 5. Wie verhält sich das zur Trennung der Theile nöthige Gewicht zu dem, welches den kleinsten Theil seiner Elasticität zerstört?

Diese Fragen hat Duleau **) in Betreff des geschmiedeten Eisens zu beantworten gesucht. Er machte seine Versuche mit Stangen von geschmiedetem Eisen, die einzeln oder auf verschiedene Weise mit einander verbunden waren, vertical standen wie Säulen oder verticale Träger, oder horizontal auf Stützen

---

*) A course of lectures on natural philosophy. Vol. II. p. 46.)

**) Theoret. practische Versuche über den Widerstand und die Haltbarkeit des geschmiedeten Eisens. Uebers. von Blumhof. Leipzig 1825.

lagen, wie die Balken unter dem breternen Fussboden, einige waren gerade, andere wie ein Brückenbogen gekrümmt und zwischen zwei festen Stützen befindlich. Diese Stücke wurden mit Gewichten belastet, die zu gering waren, um ihre Elasticität ändern zu können, und ihre Formänderung untersucht. Schliesslich wurden Stangen an einem Ende in einen Schraubstock eingespannt, am anderen um einen gewissen Winkel gedreht, und dieser mit der dazu nöthigen Kraft verglichen. Die Resultate, welche aus diesen Versuchen hervorgingen, waren folgende:

Wird ein horizontal gelegter, an beiden Enden unterstützter Stab in der Mitte mit Gewichten belastet, so sind seine Biegungen, falls sie gering sind, den angebrachten Gewichten proportional.

Ein rechtwinkliger Stab von 2 Met. Länge 0,1 M. Breite und 0,01 M. Dicke (worunter man die verticale Dimension versteht) biegt sich unter 10 Kilog. Belastung um 0,01 M. und bei solchen Stäben von ungleichen Dimensionen sind die Biegungen unter demselben Gewichte im geraden Verhältnisse der Würfel der Längen und im umgekehrten der Breiten und der Würfel der Dicken.

Die grösste Biegung, die ein Stab von 2 M. Länge und 0,01 M. Dicke, ohne Aenderung seiner Elasticität erleiden kann, ist 0,02 M.; bei anderen Stäben ist diese Biegung im geraden Verhältnisse des Quadrates der Länge, und im verkehrten der Dicke desselben.

Bei einem runden Stabe von 2 M. Länge und 0,02 M. Durchmesser beträgt die Biegung unter 10 Kilogr. 0,01061 M., bei andern Stäben wächst der Wi-

derstand verkehrt wie der Würfel seiner Länge, und direct wie die vierte Potenz des Durchmessers.

Die Biegung durch das Gewicht des Stabes selbst beträgt $\frac{5}{8}$ derjenigen, welche dasselbe Gewicht in der Mitte angebracht, hervorbringen würde.

Ein horizontal liegender, an einem Ende befestigter, am anderen freier, aber mit Gewichten belasteter Stab, sinkt am freieren Ende um so viel, als die Biegung beträgt, die ein gleich breiter und dicker aber doppelt so langer, beiderseits unterstützter Stab durch ein in seiner Mitte angebrachtes doppeltes Gewicht erleidet.

Die Biegung einer solchen Stange durch ihr eigenes Gewicht ist $\frac{3}{8}$ derjenigen gleich, die dasselbe Gewicht am freien Ende hervorbringen würde.

Ein vierkantiger Stab mit scharfen Kanten leistet in der Ebene der zwei einander entgegengesetzten Kanten denselben Widerstand, wie in der Ebene einer seiner Seiten.

Ein horizontal auf zwei Stützen ruhender, an beiden Enden so befestigter Stab, dass sich diese Enden einander nähern können, sinkt durch ein in der Mitte angebrachtes Gewicht um $\frac{1}{4}$ so viel, als wenn die Enden frei gewesen wären.

Ein rechtwinkeliger parallel mit der Länge belasteter Stab widersteht so lange, bis das Gewicht, durch welches er in der kleinsten Dimension gekrümmt werden kann, direct der Breite und dem Würfel der Dicke, verkehrt dem Quadrate der Länge proportionirt ist. Für eine Stange von 1 M. Länge und 0,01 Seite beträgt dieses Gewicht $164\frac{1}{2}$ Kilogr. Bei den ausgeführten Versuchen wurden Stäbe gebraucht,

bei denen das Verhältniss der Dicke zur Länge von 24 bis 100 wechselte. Ob dieses Gesetz auch noch ausserhalb dieser Grenze giltig sey, ist erst auszumachen. Einen runden Stab von 1 M. Länge und 0.01 M. Durchmesser bringt eine Belastung von 96,895 Kilogr. zum Biegen, und bei anderen Stäben steht dieses Gewicht im geraden Verhältnisse der vierten Potenz des Durchmessers und im umgekehrten des Quadrates der Länge.

Wenn bei einem am Ende gedrückten Stücke eine Extremität eingelassen oder befestiget ist, und sich die andere nur in der geraden Linie bewegen kann, welche die beiden Enden verbindet, so ist das zum Biegen nöthige Gewicht $\frac{9}{4}$ von dem, welches dazu erfordert würde, wenn das Stück nicht eingelassen wäre.

Sind beide Enden eines Stückes befestiget, so ist der an einem Ende angebrachte, zum Biegen nöthige Druck 4mal so gross als der, welcher dasselbe leistet, wenn die Enden frei sind.

Wird ein am Ende gedrücktes Stück in der Mitte unterstützt, so biegt es sich wie ein S, und das dazu nöthige Gewicht ist auch 4mal grösser als wenn das Stück ganz frei wäre.

Wenn zwei rechtwinkelige Stücke von gleichen Dimensionen so mit einander verbunden sind, dass sie durch ein Zwischenmittel in einer unveränderlichen Lage von einander gehalten werden, so verhält sich der Widerstand des Systemes in der Ebene, welche beide Stücke schneidet, wie $E^3 - e^3 : E^3$, wo E die ganze Dicke, e die des Zwischenraumes ist.

Wird ein Bogen in der Mitte belastet, so wird ein

Drittel in der Mitte platter, die anderen zwei Drittel hingegen convexer.

Der günstigste Punct, wo man einen Bogen belasten kann, ist in einem Viertel der Länge, von einem Ende an gerechnet.

Der Drehungsbogen, den eine runde an einem Ende befestigte Stange durch ein Gewicht K, welches nach der Richtung ihrer Tangente wirkt, erleidet, wird durch die Formel $11{,}33.Gd^4 = LKS$ ausgedrückt, wo G dieser Bogen, D der Durchmesser, L die Länge des Stabes, S der Hebelarm ist, mittelst welchem K wirkt. Für cylindrische Röhren muss man $D^4 - d^4$ statt d setzen, wo D den äusseren, d den innern Halbmesser bedeutet. Für vierkantige Stäbe gilt die Formel $16\,Gc^4 = LKS$, in welcher c die Seite des Viereckes ist; sie geht für hohle Stäbe wieder in $16\,G(C^4 - c^4) = LKS$ über.

Was Duleau in Betreff des geschmiedeten Eisens leistete, dasselbe that Tredgold *) mit Gusseisen. Er machte seine Versuche mit Eisen von verschiedenen Gusswerken, benützte auch sorgfältig die Versuche anderer und wendete alle dazu an, um mittelst Rechnung die Kraft zu bestimmen, die ein Stück von einem Quadratzoll im Durchschnitt und 1 Fuss Länge ohne bleibende Veränderung ertragen konnte, wenn es an beiden Enden unterstüzt und in der Mitte belastet wurde, und zugleich die Ausdehnung zu finden, die es durch diese Kraft erlitt. Er fand die Grösse der genannten Kraft nach einem Versuche 15300 Pf., nach drei anderen 14814 Pf., und nach

*) On cast iron. 2. edition.

wieder anderen 15160 Pf. und nach dem letzten 13333 Pf., nimmt aber die erstere Angabe als die in der Ausübung brauchbarste an.

Als Grösse der Ausdehnung, die durch eine Last von 15300 Pf. hervorgebracht wird, zeigte sich nach mehreren Versuchen $\frac{1}{1204}$, $\frac{1}{1143}$, $\frac{1}{1165}$, $\frac{1}{1107}$, $\frac{1}{1206}$, $\frac{1}{1332}$, $\frac{1}{1132}$, $\frac{1}{1361}$, der ganzen Länge.

Die Ausdehnung $\frac{1}{1204}$ wurde als Norm angenommen und darnach durch Division der Zahl 15300 der Modulus der Elasticität gefunden, als welchen sich die Grösse von 1840000 Pf. ergibt.

T r e d g o l d suchte aus mehreren von R e y n o l d, B a n k s und R e n n i e angestellten Versuchen das Verhältniss auszumitteln, welches zwischen der Kraft Statt findet, wodurch eine Stange gebogen wird, und derjenigen, wodurch der kleinste Theil ihrer Elasticität verloren geht, und fand als Mittelwerthe dieses Verhältnisses die Zahlen 2.7 : 1, 3.3 : 1, 3.4 : 1. Er liess auch Eisen von 2 verschiedenen Gusswerken, ja selbst Eisen mit Kupfer zusammenschmelzen, und untersuchte sie hierauf. Durch ersteres Mittel erhielt er eine harte brüchige Masse, bei welcher die Kraft, welche an einem den vorigen ähnlichem Stücke keine bleibende Aenderung hervorbrachte, 15390 Pf., die Verlängerung 0,0008, mithin der Modulus der Elasticität 19130000 Pf. betrug. Bei einer anderen Mischung war obige Kraft von derselben Grösse, die dadurch bewirkte Verlängerung betrug aber 0.00078 und daher der Modulus 19514000 Pf. 6 Theile Eisen und 1 Theil Kupfer gaben ein der Feile nachgebendes Product, welches durch 15390 Pf. um 0.0009 verlängert

wurde und desshalb einen Modulus von 16921000 Pf. hatte.

Tredgold bemühte sich auch die Verminderung zu bestimmen, welche eine Temperaturerhöhung an der Festigkeit des Eisens hervorbringt. Er erhitzte zu diesem Zwecke eine 3 F. lange, 1 Qdr.Z. im Durchschnitt haltende Stange aus Schmiedeeisen in einem Bade bis 212° F., hing schnell ein Gewicht von 300 Pf. daran und beobachtete die dadurch hervorgebrachte Biegung, entfernte dann das Bad, und beobachtete den Erfolg des Erkaltens, welcher darin bestand, dass die Biegung abnahm, so wie die Stange abkühlte. Als ihre Temperatur 60° F. war, hatte sich diese bis auf $\frac{3}{4}$° der zum Messen der Biegung angebrachten Scale vermindert, während sie durch Wegnahme der ganzen Belastung um 14 solche Grade abnahm. Daraus schloss er, dass die Belastung bei 60° fast um $\frac{1}{20}$ weniger Wirkung hervorbringt als bei 212° F., und dass daher die Stärke des Eisens durch Temperaturerhöhung um 212 — 60 = 152° F. fast um $\frac{1}{20}$ vermindert wird so, dass auf 1° F. ungefähr $\frac{1}{3000}$ oder auf 1°C. beinahe $\frac{1}{1700}$ kommt.

Tredgold *) richtete auch sein Augenmerk auf die Elasticität des Stahles bei verschiedenen Härtegraden. Er ertheilte einer Stahlstange nach und nach verschiedene Härtegrade, legte sie auf zwei eiserne Unterlagen, die auf einem starken Gestelle ruhten, belastete sie in der Mitte mit Gewichten, die sich ohne weitere Verrückung sanft heben liessen, und mass mit-

*) Philosophical transact. of the royal society of London, 1824. p. 1.

telst eines Winkelhebels, dessen kürzerer, wohl äquilibrirter Arm auf der Stange ruhte, während der längere über einen Quadranten spielte, die Biegung der Stange.

Er wählte zum ersten Versuche eine Stange blasigen Stahles, die 14 Z. lang, 0,95 Z. breit, und 0,375 Z. hoch war. Sie erlitt, als sie zur Härte der gewöhnlichen Feilen gebracht war, durch 54 Pf. in der Mitte eine Vertiefung von 0,02 Z., durch 82 Pf. eine von 0,03, und durch 110 Pf. eine von 0,04 Z.; auch konnte letzteres Gewicht ohne weitere Aenderung der Form der Stange einige Stunden darauf liegen bleiben. Dieselben Biegungen wurden bei derselben Belastung bemerkt, als die Härte der Stange zum Strohgelb und zu einem gleichförmigen Blau herabgestimmt ward, ja sogar, als man sie roth glühen und dann langsam erkalten liess. In letzterem Zustande bewirkte überdiess eine Last von 110 Pf. keine bleibende Formänderung, wenn man sie wegnahm. Als sie wieder gehärtet war, traten bei obigen Belastungen wieder dieselben Biegungen ein und es bewirkten überdiess 300 Pf. und 350 Pf. eine Biegung von 0,115 Z. und von 0,130 Z. Als letzteres Gewicht abgenommen wurde, behielt sie eine Biegung von 0,005 Z., die bei einer Zulage von 10 Pf. auf 0,01 Z. stieg.

Eine andere Stange von 25 Z. Länge, 0,92 Z. Breite und 0,36 Z. Höhe bekam in einem Zustande, wo sie gefeilt werden konnte, durch 18,6 Pf. in der Mitte eine Vertiefung von 0,05 Z. durch 37 Pf. stieg diese auf 0,10 Z. durch 47f P. auf 0,127 Z.

Wurde die Stange hart gemacht, so dass sie der Feile widerstand, so war der Erfolg derselbe; bei der

Härte der strohgelben Farbe bogen sie aber 47 Pf. um 0,127 Z., 85 Pf. um 0,230, 130 Pf. um 0,350, 150 Pf. um 0,490, 185 Pf. um 0,50 und 385 Pf. um 1,04 Z. Die Last von 150 Pf. brachte eine bleibende Vertiefung von 0,012 Z. herbei. Es ist daher die Elasticität des Stahles bei jedem Härtegrade nahe dieselbe. Die Kraft, welche eine bleibende Veränderung erzeugt, verhält sich beim harten Stahle zu der, welche den Bruch hervorbringt, wie 350:580 oder wie 1 : 1,66; beim strohgelben hingegen wie 150 : 385 oder wie 1 : 2,56. Tredgold zieht auch zugleich aus seinen und aus den schon früher von Rennie angestellten Versuchen den Schluss, dass der Stahl beim Härten an Kraft, einer äusseren Gewalt zu widerstehen, verliert. Nach seiner Ansicht kommt dieses daher, dass beim Härten den äussersten Theilen die Hitze schneller entrissen wird, als sie von Innen nachfolgen kann, wodurch jene mehr zusammengezogen werden, diese aber sich ausdehnen können.

Versuche über die Stärke des Eisens, in Wien angestellt *).

Die Actiengesellschaft, welche sich zur Herstellung einer Kettenbrücke in Wien bildete, schaffte eine Maschine an, mit welcher man alle zur Brücke gehörigen Eisenstangen prüfen konnte, die aus einem ungemein kräftigen Winkelhebel bestand. Mit dieser wurden unter andern auch einige interessante Versuche über die absolute Stärke eiserner Stangen angestellt. Eine solche 9 F. lange, 2 Zoll im Querschnitt haltende Stange,

*) Die Sophienbrücke etc. von Mitis. Wien 1825.

fing bei einer Belastung von 500 Centner an, sich zu dehnen, bekam kleine Querrisse an den Kanten, verlängerte sich bei vermehrter Belastung um 8 Z., bekam an einer Stelle eine Durchschnittsfläche von 1,125 Z. und riss durch eine Kraft von 800 Ct. Zwei andere gleiche Stangen wurden gleich mit 800 Ct. belastet und brachen auf der Stelle, ohne bedeutende Verlängerung, zeigten aber an der Bruchfläche, dass die Theile beim Schweissen nicht vollkommen mit einander verbunden waren. Eine vierte Stange von denselben Dimensionen, hielt bei einer Belastung von 424 Ct. noch kräftige Hammerschläge aus, riss aber bei 550 Ct. mit einem Knall; sie zeigte an der Bruchfläche eine schlackenartige Beschaffenheit. Ein durchgeglühter, 1 Q. Z. im Durchschnitt haltender, 9 Z. langer ovaler Ring verlängerte sich schon bei 400 Ct. Last, riss nach einer Ausdehnung von 15 L. unter 776 Ct. Ein zweiter gleicher Ring, der kalt gehämmert ward, zog sich bei 600 Ct. kaum um 6 L. und riss bei 643 Ct. mit einem Knall an einer Stelle, der etwas schwächer war, als der übrige Theil.

Buchanan *) untersuchte die relative Stärke einiger Balken aus Föhrenholz und Gusseisen. Dabei war vorzüglich der Apparat interessant, dessen er sich bediente. Es war ein hydrostatisches Gebläse, aus dem man die Luft herausziehen, und dadurch bewirken konnte, dass durch den äusseren Luftdruck der bewegliche Boden eines Gefässes mächtig herabgedrückt wurde. Dieser Boden wurde mit der Mitte des zu untersuchenden, an beiden Enden unterstützten Balkens, in Verbindung gebracht, um ihn zu bie-

*) Edinb. philos. journal. N. 23

gen und zu brechen. Aus diesen Versuchen ergibt sich, dass die Querstärke von der Länge und Tiefe des Balkens und vom Querschnitte der Bruchfläche abhängt, dass sie abnimmt, wie die Länge wächst, und zunimmt wie die Tiefe. Die Biegung ist innerhalb gewisser Grenzen dem Druck proportionirt. Ein Föhrenbalken darf mit Sicherheit nur mit der Hälfte der Last beschwert werden, die ihn bricht.

Schneiden des harten Stahles und anderer harter Körper durch weiches Eisen.

Barnes, Mechanikus in den vereinigten Staaten Nordamerika's, wollte eine eiserne, am Umfange schneidende Scheibe mittelst einer Feile kleiner machen und sie mehr abrunden, und bemerkte mit Erstaunen, dass die Feile einen Einschnitt erhielt, ohne die Scheibe anzugreifen. Perkins in London wiederhohlte diesen Versuch und erhielt dieselben Resultate, als er der Scheibe eine Geschwindigkeit von 10000 F. in einer Minute gab. Er fand auch dieselbe Wirkung an den Seitenflächen der Scheibe. Später haben mehrere Gelehrte, z. B. Pleischl *) in Prag Versuche der Art und zwar auch mit kupfernen Scheiben angestellt, und man hat sogar Quarz und andere harte Steine mit Erfolg so zu schneiden versucht. Dazu gehört aber eine gewisse Geschwindigkeit der Scheibe. Diese suchten vorzüglich Darier und Colladon **) auszumitteln. Sie hielten zu diesem Zwecke gut gehärtete Grabstichel an eine wohl centrirte 7 Z. 5 L. im Durchmesser haltende Scheibe an, und fanden, dass der Grabstichel sehr leicht angriff,

*) Kastners Archiv. 1 B. S. 146.

**) Bibliotheque universelle. April 1824.

so lange die Geschwindigkeit der Scheibe weniger als 34 F. betrug; bei einer Geschwindigkeit von 34 F. 5 Z. schnitt er nicht mehr so gut, wurde aber auch nicht angegriffen, aber bei 34 F. 9 Z. Geschwindigkeit litt er schon merklich und schnitt wenig, aber bei 45 F. 1 Z. war die Wirkung der Scheibe auf ihn schon stark und wuchs fortwährend mit der Geschwindigkeit, ja wenn diese 70 F. betrug, war der Grabstichel sehr heftig, aber die Scheibe kaum merklich angegriffen. Bei einer Geschwindigkeit von 130 — 200 F. griff die Scheibe auch Achat und Bergkrystall, jedoch nicht bedeutend, an. Kupfer griff zwar nicht den gehärteten Grabstichel, aber doch eine Legirung an, die härter ist als Kupfer. Diese Einwirkung weicher Körper auf harte erklären einige aus dem durch frei gewordene Wärme bewirkten Weichwerden des ruhenden Körpers, andere aber wie z. B. Darier und Colladon *) und Allou **) nehmen an, der gedrehte Körper wirke bloss durch den Stoss, der wegen der grossen Geschwindigkeit die unmittelbar getroffenen Theile mit seiner ganzen Stärke afficirt und sich nicht der ganzen Masse mittheilen kann, gleichwie eine Flintenkugel ein leicht aufgestelltes Bret durchbohrt aber nicht umstosst. Es muss einem wirklich diese Erklärung sehr wahrscheinlich werden, wenn man bedenkt, dass der Stahl beim Schneiden seine Natur nicht ändert, dass die Wirkung der Scheibe im Augenblicke der Berührung eintritt, dass ein benetzter Grabstichel von einer Scheibe so wie ein trockener angegriffen wird, wo doch die Wärme zur Dampfbildung verwendet werden muss.

(Die Fortsetzung folgt.)

---

*) Bibliotheq. universelle, l.c. **) Annales de l'indust. nation. oct. 1825.

MATHEMATISCHE ABTHEILUNG.

I. Note über einen analytischen Lehrsatz von Cauchy.

(Bulletin des sciences par la société philomatique. 1824. p. 117 etc.)

Lehrsatz. Es seyen

(1) $f(x) = k(x-a)(x-b)(x-c)\ldots = kx^m + lx^{m-1} + \ldots + px + q$

und

(2) $F(x) = K(x-A)(x-B)(x-C)\ldots = Kx^n + Lx^{n-1} + \ldots + Px + Q$

zwei nach x geordnete Polynome, das erste vom Grade m, und das zweite vom Grade n; ferner sey R eine constante Grösse, so ist es immer möglich, zwei andere Polynome u, v, das erste vom Grade $n-1$, das andere vom Grade $m-1$ zu finden, welche der Gleichung

(3) $$uf(x) + vF(x) = R$$

entsprechen.

Beweis. Vermög der Interpolationsformel von Lagrange ist die Summe aller Producte von der Form

$$R\,\frac{(x-b)(x-c)\;.\;.\;.\;.\;(x-A)(x-B)(x-C)\;.\;.\;.\;.}{(a-b)(a-c)\;.\;.\;.\;.\;(a-A)(a-B)(a-C)\;.\;.\;.\;.} = R\,\frac{\dfrac{f(x)}{x-a}\;.\;F(x)}{f'(a)\;.\;F(a)}$$

und aller Producte von der Form

$$R\,\frac{(x-a)(x-b)(x-c)\;.\;.\;.\;(x-B)(x-C)\;.\;.\;.\;.}{(A-a)(A-b)(A-c)\;.\;.\;.\;(A-B)(A-C)\;.\;.\;.\;.}$$

$$= R\,\frac{f(x)\;.\;\dfrac{F(x)}{x-A}}{f(A)\;.\;F'(A)}$$

gleich R.

Es wird also der Gleichung (3) Genüge geleistet, wenn man

$$(4)\quad u = R\left\{\frac{\left(\dfrac{F(x)}{x-A}\right)}{f(A)F'(A)} + \frac{\left(\dfrac{F(x)}{x-B}\right)}{f(B)\,.\,F'(B)} + \frac{\left(\dfrac{F(x)}{x-C}\right)}{f(c)\,.\,F'(c)} + \text{etc.}\right\}$$

und

$$(5)\quad v = R\left\{\frac{\left(\dfrac{f(x)}{x-a}\right)}{F(a)\,f'(a)} + \frac{\left(\dfrac{f(x)}{x-b}\right)}{F(b)\,f'(b)} + \frac{\left(\dfrac{f(x)}{x-c}\right)}{F(c)f'(c)} + \text{etc.}\right\}$$

nimmt. folglich u. s. w.

Anmerkung. Wollte man die durch die Gleichung (3) geforderten Polynome u und v direct und zwar so bestimmen, dass sie den niedrigst möglichen Grad erhalten, so bedürfte es nur der Bemerkung, dass dieser Gleichung gemäss

für $\quad x = A,\ u = \dfrac{R}{f(A)}$

für $\quad x = B,\ u = \dfrac{R}{f(B)}$

u. s. w.

ferner für $\quad x = a,\ v = \dfrac{R}{F(a)}$

für $\quad x = b,\ v = \dfrac{R}{F(b)}$

u. s. w.

wird. Man kennt also n verschiedene Werthe von u und m verschiedene Werthe von v. Hieraus folgt, dass das einfachste Polynom, welches man für u zu wählen im Stande ist,

vom Grade n—1, und jenes für v vom Grade m—1 seyn muss. Bestimmt man diese Polynome nach ihren oben erhaltenen particulären Werthen mit Hülfe der Lagrange'schen Formel, so kömmt man ebenfalls auf die Gleichungen (4) und (5).

Folgerungen aus obigem Lehrsatze.

1) Es sey

$$(6)\quad R = k^m K^n\ (a-A)\ (a-B)\ (a-C)\ \ldots$$
$$\times\ (b-A)\ (b-B)\ (b-C)\ \ldots$$
$$\times\ (c-A)\ (c-B)\ (c-C)\ \ldots$$
$$\times\ \text{etc.}$$

oder was dasselbe ist:

$$(7)\quad R = k^m F(a) \,.\, F(b) \,.\, F(c) \ldots$$
$$= (-1)^{mn} K^n f(A) \,.\, f(B) \,.\, f(C) \ldots$$

Das erste der zwei Producte

$$F(a) \,.\, F(b) \,.\, F(c) \ldots$$
$$f(A) \,.\, f(B) \,.\, f(C) \ldots$$

ist offenbar eine ganze und symmetrische Function der Wurzeln der Gleichung $f(x) = o$, folglich eine ganze Function der Grössen

$$K,\ L,\ \text{etc.} \ldots P,\ Q;\ \frac{1}{k},\ \text{etc.} \ldots \frac{p}{k},\ \frac{q}{k}$$

während das zweite eine ganze Function der Grössen

$$k,\ l,\ \text{etc.} \ldots p,\ q;\ \frac{L}{K},\ \ldots \frac{P}{K},\ \frac{Q}{K}$$

ist. Diese Ergebnisse können zusammen nicht bestehen, wenn nicht der in der Gleichung (7) dargestellte Werth von R eine ganze Function der Grössen

$$k,\ l,\ \ldots\ p,\ q;\ K,\ L,\ \ldots\ P,\ Q$$

ist. Zugleich gehen unter dieser Voraussetzung die Gleichungen (4) und (5) in

$$(8)\qquad u = (-1)^{mn} K^n \frac{f(B).f(C).f(D)\ldots(B-C)(B-D)\ldots(C-D)\ldots(x-B)(x-C)(x-D).+\text{etc.}}{(A-B)(A-C)(A-D)\ldots(B-C)(B-D)\ldots(C-D)\ldots}$$

und

$$(9)\qquad v = k^m \frac{F(b).F(c).F(d)\ldots(b-c)(b-d)\ldots(c-d)\ldots(x-b)(x-c)(x-d)\ldots+\text{etc.}}{(a-b)(a-c)(a-d)\ldots(b-c)(b-d)\ldots(c-d)\ldots}$$

Der Zähler und Nenner des in der Gleichung (8) erscheinenden Bruches sind Functionen von A, B, C, D.... welche bei allen unter diesen Grössen vorgenommenen Vertauschungen in numerischer Beziehung gleiche und nur dem Vorzeichen nach von einander abweichende Werthe erhalten*); auch ist, wie man leicht sieht, der Zähler durch den Nenner ohne Rest theilbar; es ist daher der Quotient $\frac{u}{K^n}$ eine symmetrische und ganze Function der Wurzeln der Gleichung $F(x) = o$, folglich u eine ganze Function der Grössen k, l, ... p, q, K, $\frac{L}{K}$, ... $\frac{P}{K}$, $\frac{Q}{K}$ und der veränderlichen x. Aus demselben Grunde muss v eine ganze Function der Grössen K, L ... P, Q, k, $\frac{l}{k}$, ... $\frac{p}{k}$, $\frac{q}{k}$ und der veränderlichen x seyn. Hieraus folgt, dass u und v entweder zwei ganzen über.

*) C. nennt sie fonctions alternées. Man sehe seinen Cours d'Analyse de l'ecole royale polytechnique. 1. Partie. Chap. III.

Functionen der Grössen x, k, l...p, q, K, L...P, Q oder zwei solchen Functionen, wovon die erste durch eine Potenz von K, und die zweite durch eine Potenz von k getheilt ist, gleich sind. Da aber R bereits eine ganze Function der Grössen, k, l . . . p, q; K, L . . . P, Q, vorstellt, und die Grössen u, v der Gleichung (3) Genüge leisten müssen, so kann die zweite Annahme nicht zugelassen werden. Erhält also R den durch die Gleichungen (6) oder (7) ausgesprochenen Werth, so sind R, u, v ganze Functionen der Grössen k, l... p, q; K, L . . . P, Q und der (bloss in u und v sich zeigenden) veränderlichen x. Ueberdiess erscheinen in diesen ganzen Functionen bloss ganze numerische Coefficienten.

2) Wird $k = 1$, $K = 1$ angenommen, so reduciren sich die Gleichungen (6) und (7) auf folgende

$$(10)\quad R = (a-A)(a-B)(a-C)\ldots(b-A)(b-B)(b-C)\ldots$$
$$\ldots(c-A)\ (c-B)\ (c-C)\ldots\ldots$$

$$(11)\quad R = F(a).F(b).F(c)\ldots. = (-1)^{mn} f(A).f(B).f(C)\ldots$$

Dieser besondere Fall, auf welchen sich die übrigen leicht zurückführen lassen, wird in dem Memoire betrachtet, welches dem Institute am 22. Febr. 1824 übergeben wurde.

3) Sollen sich die Functionen f(x), F(x) in zwei ganze Functionen von x und y verwandeln, wovon die erste zum mten und die zweite zum nten Grade gehört, so ist es nothwendig und hinreichend, dass die Grössen k, l... p, q; K, L... P, Q ganze Functionen von y werden, welchen beziehungsweise die Ordnungszahlen 0, 1, ... m — 1, m; 0, 1, . . . n — 1, n zugehören. Dann reduciren sich die Quotienten

$$\frac{1}{y}, \ldots \frac{p}{y^{m-1}}, \frac{q}{y^m}; \frac{L}{y} \ldots \frac{P}{y^{n-1}}, \frac{Q}{y^n}$$

bei dem unendlichen Wachsen von y auf endliche Grössen, und daher gilt dasselbe auch von den Werthen von x, welche den Gleichungen

$$kx^m + \frac{1}{y} x^{m-1} + \ldots + \frac{p}{y^{m-1}} x + \frac{q}{y^m} = 0$$

$$\text{und } Kx^n + \frac{L}{y} x^{n-1} + \ldots + \frac{P}{y^{n-1}} + \frac{Q}{y^n} = 0$$

genügen, das heisst von den Quotienten

$$\frac{a}{y}, \frac{b}{y}, \frac{c}{y} \ldots\ldots \frac{A}{y}, \frac{B}{y}, \frac{C}{y} \ldots\ldots$$

und von dem folgenden:

$$\frac{R}{y^{mn}} = \left(\frac{a}{y} - \frac{A}{y}\right)\left(\frac{a}{y} - \frac{B}{y}\right)\left(\frac{a}{y} - \frac{C}{y}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(\frac{b}{y} - \frac{A}{y}\right)\left(\frac{b}{y} - \frac{B}{y}\right)\left(\frac{b}{y} - \frac{C}{y}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(\frac{c}{y} - \frac{A}{y}\right)\left(\frac{c}{y} - \frac{B}{y}\right)\left(\frac{c}{y} - \frac{C}{y}\right)\ldots \text{ etc.}$$

woraus erhellet, dass der nach den Gleichungen (6) oder (7) gebildete Werth von R eine ganze Function von y ist, deren Ordnungszahl das Product mn nicht übersteigt. Schreibt man nun unter diesen Voraussetzungen f(x, y), F(x, y) statt f(x), F(x), so verwandelt sich die Formel (3) in

$$(12) \quad uf(x, y) + vF(x, y) = R$$

wobei alle Werthe von y, welche für die Gleichungen

$$(13) \quad f(x, y) = 0, \; F(x, y) = 0$$

einerlei Werthe von x zulassen, auch der Gleichung

$$(14) \quad R = 0$$

entsprechen.

4) Sind also zwei algebraische Gleichungen zwischen x und y von den Graden m und n gegeben, so kann man aus denselben durch Elimination von x immer eine Gleichung für y ableiten, deren Grad höchstens dem Producte mn gleichkommt. Die Bildung des ersten Theiles dieser Gleichung nach der Methode der symmetrischen Functionen unterliegt keiner Schwierigkeit.

5) Wenn die Grössen k, l . . . p, q; K, L . . . P, Q d. h. die Coefficienten der Polynome f(x), F(x) ganze Zahlen sind, so sind es auch die Coefficienten der mittelst der Formeln (8) und (9) bestimmten Functionen u und v, und der numerische Werth von R, welchen die Gleichung (6) oder (7) darbietet, ist gleichfalls eine ganze Zahl. Lassen sich in diesem Falle die Polynome f(x), F(x) für denselben Werth von x durch die Zahl p dividiren, so folgt aus der Formel (3), dass p auch ein Divisor der ganzen Zahl R ist; oder nach der von Gauss eingeführten Bezeichnung, wenn

(15) $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ und $F(x) \equiv 0 \pmod{p}$

so ist auch

(16) $$R \equiv 0 \pmod{p}$$

Mit Hülfe dieser letzten Formel wird man leicht alle ganzen Zahlen finden, durch welche die Polynome f(x) und F(x) zugleich theilbar sind. Die grösste dieser ganzen Zahlen, oder der grösste gemeinschaftliche ganze Theiler dieser zwei Polynome ist der numerische Werth von R selbst. Fällt derselbe = 1 aus, so haben diese zwei Polynome nie gemeinschaftliche Factoren; ist aber R = 0, so lassen sie deren unendlich viele zu.

6) Aus den oben aufgestellten Sätzen erhellet, dass

man zu mehreren ganzen Functionen von x, y, z.... deren Anzahl jene dieser veränderlichen Grössen um eine Einheit übersteigt, und deren Coefficienten ganze Zahlen sind, immer eine ganze Zahl zu finden im Stande ist, welche alle gemeinschaftlichen Divisoren dieser Polynome als Factoren enthält. Betrachtet man insbesondere drei Polynome von den Formen

$$(17)\quad F(x,\,y),\quad f(x) \text{ und } f(y)$$

so zeigt sich

$$(18)\ R = K^{m(m+1)} F(a,a)F(a,b)F(a,c)\ldots F(b,a)F(b,b)F(bc)\ldots$$
$$\ldots F(c,a)F(c,b)F(c,c)\ldots$$

als der grösste gemeinschaftliche Divisor derselben, wobei a, b, c . . . die Wurzeln der Gleichung $f(x) = o$ vorstellen.

7) Da jede Primzahl p für jeden Werth von x nothwendig ein Theiler des Binoms

$$(19)\ x^p - x = x\left(x - \cos\frac{2\pi}{p-1} - \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{p-1}\right)$$
$$\times\left(x - \cos\frac{4\pi}{p-1} - \sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{p-1}\right)$$
$$\times \ldots\ldots \text{ etc.}$$
$$\times (x-1)$$

seyn muss, so folgt aus (5), dass jede ein Polynom F(x) genau theilende Primzahl p auch in dem Producte

$$(20)\ R = F(o)F\left(\cos.\frac{2\pi}{p-1} + \sqrt{-1}\sin.\frac{2\pi}{p-1}\right)$$
$$F\left(\cos.\frac{4\pi}{p-1} + \sqrt{-1}\sin.\frac{4\pi}{p-1}\right)\ldots\ldots F(1)$$

genau enthalten ist, welches man, wenn das erste Glied von F(x) die Einheit zum Coefficienten hat, und

A, B, C . . . die Wurzeln der Gleichung $F(x) = o$ bedeuten, auch auf die Form

$$(21)\ R = \pm ABC \ldots (A^{p-1} - 1)(B^{p-1} - 1)(C^{p-1} - 1)$$

etc. bringen kann. Setzt man insbesondere

$$F(x) = \frac{x^n + 1}{x + 1}$$

wobei n eine beliebige Primzahl anzeigt, so ergibt sich $R = o$ oder $R = \pm 2$, je nachdem p von der Form $nx + 1$ ist, oder nicht. Es sind also die Primzahlen dieser Form, 2 ausgenommen, die einzigen, welche in $x^n + 1$ aufgehen, ohne Factoren von $x + 1$ zu seyn, ein bereits bekannter Satz.

8) Jede Primzahl p, durch welche die Binome $x^p - x$, und $y^p - y$ was auch immer x und y für ganze Werthe haben mögen, theilbar sind, kann in dem Polynom $F(x - y)$ nicht aufgehen, ohne in dem numerischen Werthe des zweiten Theiles der Gleichung (18) enthalten zu seyn, vorausgesetzt, dass man für a, b, c... die Wurzeln der Gleichung $x^p - x = o$ annimmt.

II. Ueber die Formeln, welche die Potenzen des Sinus oder Cosinus eines Kreisbogens durch die Sinusse und Cosinusse der Vielfachen dieses Bogens darstellen.

Diese Formeln, welche selbst Anfängern in der höhern Analysis nicht unbekannt sind, geben uns ein merkwürdiges Beyspiel, wie lange sich selbst in der evidentesten und strengsten aller Wissenschaften Irr-

thümer erhalten können, welche sich in die Theoreme derselben durch Ausserachtlassung der genauen Erwägung aller die Rechnung begleitenden Umstände einschleichen.

Schon am Ende des vierzehnten Kapitels der Introductio in analysin infinitorum Lausannae 1748, hatte Euler das Gesetz, nach welchem die Potenzen des Sinus und Cosinus eines Bogens mit ganzen positiven Exponenten aus den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen desselben Bogens zusammengesetzt werden, auf dem Wege der Induction nachgewiesen.

In der Abhandlung „Subsidium Calculi sinuum", welche sich im 5ten Bande der Nov. Commentar. Acad. scient. imp. Petropolitanae für die Jahre 1754 und 55 befindet, versucht er die Allgemeinheit dieses Gesetzes für jeden Werth des Exponenten mit Hülfe der von ihm in das Gebiet der ersten Elemente der Analysis versetzten Moivre'schen Gleichung

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \sqrt{-1}\,\sin n\varphi$$

zu erweisen. Zu diesem Ende lässt er

$$\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi = u$$

und $\cos\varphi - \sqrt{-1}\,\sin\varphi = v$ seyn,

woraus folgt $2\cos\varphi = u + v$

und $2^n \cos\varphi^n = (u + v)^n$.

Der binomische Lehrsatz gibt ihm

$$2^n \cos\varphi^n = u^n + nu^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1.2}u^{n-2}v^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u^{n-3}v^3 + \text{etc.}$$

und durch Verwechslung von u mit v

$$2^n \cos\varphi^n = v^n + nv^{n-1}u + \frac{n(n-1)}{1.2}v^{n-2}u^2$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}v^{n-3}u^3 + \text{etc.}$$

folglich, wenn diese zwei Gleichungen addirt werden,

$$2^{n+1}\cos\varphi^n = u^n + v^n + n(u^{n-2} + v^{n-2})uv$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}(u^{n-4} + v^{n-4})u^2v^2$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(u^{n-6} + v^{n-6})u^3v^3 + \text{etc.}$$

Aber es ist $uv = (\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)$
$= \cos\varphi^2 + \sin\varphi^2 = 1$

und der Moivre'schen Gleichung gemäss

$$u^n + v^n = 2\cos n\varphi;$$

daher wird

$$2^n\cos\varphi^n = \cos n\varphi + n\cos(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)\varphi$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos(n-6)\varphi + \text{etc.}$$

Obschon Euler das übrigens allgemein gültige Moivre'sche Theorem nur für ganze positive Exponenten beweiset, so erlaubt er sich doch die für $2^n\cos\varphi^n$ erhaltene Formel auf ganze negative wie auch auf gebrochene Werthe des Exponenten n auszudehnen, welcher Meinung auch Lagrange in den Leçons sur le calcul des fonctions. Paris 1806. p. 147 etc. beipflichtet, wo er dieselbe Formel mit Hülfe der Methode der unbestimmten Coefficienten ableitet, ohne einer Beschränkung der Werthe des Exponenten zu erwähnen. Um die Formeln für $\sin\varphi^n$ zu erhalten, vertauschen beide Schriftsteller den Bogen φ mit seiner Ergänzung zum Quadranten.

Poisson hat zuerst auf die Unzulässigkeit der Formel

$$2^n \cos\varphi^n = \cos n\varphi + n\cos(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)\varphi + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos(n-6)\varphi + \text{etc.}$$

für Werthe von n, welche keine ganzen positiven oder negativen Zahlen sind, aufmerksam gemacht Er zeigte in der diesen Gegenstand betreffenden Note, welche in das Januarheft für 1811 der Correspondance sur l'ecole polytechnique (Tom. II. pag. 212) eingerückt wurde, nicht nur allein, dass diese Formel wenn $n = \frac{1}{3}$ und $\varphi = \pi$ angenommen wird, wobei π die halbe Kreisperipherie deren Halbmesser $= 1$ ist, anzeigt, für $\sqrt[3]{2\cos\pi} = \sqrt[3]{-2}$ das unrichtige Resultat

$$\cos\frac{\pi}{3} + \tfrac{1}{3}\cos(\tfrac{1}{3}-2)\pi + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{1.2}\cos(\tfrac{1}{3}-4)\pi + \text{etc.}$$

$$= \cos\frac{\pi}{3}\left(1 + \tfrac{1}{3} + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{1.2} + \dots\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{3}\,.\,(1+1)^{\frac{1}{3}} = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2}$$

darbietet, sondern er berichtigte auch die oben angeführte Euler'sche Deduction derselben, deren Beschränkung auf ganze Werthe des Exponenten n darin liegt, dass die Reihen

$$(u+v)^n = u^n + nu^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1.2}u^{n-2}v^2 + \dots\dots$$

und

$$(v+u)^n = v^n + nv^{n-1}u + \frac{n(n-1)}{1.2}v^{n-2}u^2 + \dots\dots$$

für identische Werthe der Potenz $2^n \cos\varphi^n$ angenommen werden, während doch die Binomialformel, wenn

n keine ganze Zahl bedeutet, nur einen individuellen Werth der vieldeutigen Grösse $(u + v)^n$ und zwar nicht genau denselben angibt, je nachdem man die Entwickelung nach den steigenden oder nach den fallenden Potenzen von v vornimmt. Poisson gibt dem Ausdrucke

$$2^n \cos\varphi^n = u^n + nu^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1.2}u^{n-2}v^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u^3v^3 + \text{etc.}$$

die Form

$$2^n \cos\varphi^n = u^n + nu^{n-2}uv + \frac{n(n-1)}{1.2}u^{n-4}u^2v^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u^{n-6}u^3v^3 + \text{etc.}$$

woraus, wenn man die Potenzen von u nach der Moivre'schen Formel transformirt,

$$(1)\quad 2^n\cos\varphi^n = \cos n\varphi + n\cos(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)\varphi + \ldots\ldots + \sqrt{-1}\left(\sin n\varphi + n\sin(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2}\sin(n-4)\varphi + \ldots\right)$$

folgt, eine Gleichung, welche sowohl für ganze als auch für gebrochene Werthe von n besteht. Vertauscht man aber bei dieser Entwickelung u mit v, so findet man

$$(2)\quad 2^n\cos\varphi^n = \cos n\varphi + n\cos(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)\varphi + \ldots\ldots - \sqrt{-1}\left(\sin n\varphi + n\sin(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2}\sin(n-4)\varphi + \ldots\right)$$

welche Gleichung von (1) nur im Zeichen der Wurzelgrösse $\sqrt{-1}$ abweicht.

Jede der Formeln (1) und (2) stellt nun einen der Werthe dar, welche der Potenz $2^n \cos\varphi^n$ zukommen, wenn n keine ganze positive Zahl ist, und zwar jede einen andern; um alle Werthe der erwähnten Potenz zu erhalten, setze man alle Bogen, welche denselben Cosinus wie φ zulassen, nämlich

$$\varphi \pm 2\pi,\ \varphi \pm 4\pi,\ \varphi \pm 6\pi,\ \varphi \pm 8\pi \text{ etc.}$$

statt φ. Hiebei ist, wenn man φ sowohl positiv als auch negativ nimmt, nur eine der Formeln (1), (2) nöthig.

Bedeutet n einen rationalen Bruch, welcher, nachdem er durch die einfachsten Zahlen ausgedrückt worden ist, den Nenner m besitzt, so findet man, dass alle diese Substitutionen im Grunde nur auf m verschiedene Resultate führen, und diess sind die m Werthe, welche der Potenz $2^n \cos\varphi^n$ unter der gemachten Voraussetzung gehören.

Ist n eine ganze positive oder negative Zahl, so hat $2^n \cos\varphi^n$ bloss einen einzigen Werth; die Formeln (1) und (2) stimmen daher in diesem Falle überein, woraus

$$2^n \cos\varphi^n = \cos n\varphi + n\cos(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)\varphi + \text{etc.}$$

$$\text{und } \sin.n\varphi + n.\sin(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2}\sin(n-4)\varphi + \text{etc.} = 0.$$

folgt. Die Richtigkeit dieser letztern Gleichung ist, wenn n einen ganzen positiven Werth erhält, leicht einzusehen, weil dann der Ausdruck rechter Hand das Gleichheitszeichen abbricht, und je zwei vom Anfange und Ende desselben gleichweit entfernte Glieder gleiche numerische Werthe und entgegengesetzte Zeichen darbieten. Nicht so leicht fällt die Be-

schaffenheit des erwähnten Ausdruckes in die Augen, wenn n eine ganze negative Zahl ist. Hier dringt sich nun die Frage auf, was die Reihen

$$\cos n\varphi + n\cos(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\cos.(n-4)\varphi + \text{etc.}$$

und

$$\sin n\varphi + n\sin(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\sin(n-4)\varphi + \text{etc.}$$

wohl für eine Bedeutung haben mögen, wenn n irgend eine beliebige Zahl vorstellt?

Diese Frage, welche in Bezug auf die zweite Reihe schon früher Deflers der Analyse zu unterwerfen versuchte (Lacroix Traité de calcul diff. et integral. 2 edition Tom. III. pag. 621) ist zuerst von Poinsot in einem der Pariser Akademie der Wissenschaften den 19. Mai 1823 mitgetheilten Aufsatze, welcher aber erst im J. 1825 unter dem Titel „Recherches sur l'analyse des sections angulaires" erschien, und fast zu gleicher Zeit von Dr. M. Ohm in dessen „Aufsätzen aus dem Gebiete der höhern Mathematik." Berlin 1823 IV. Abtheilung beantwortet worden. Endlich hat Poisson, welchem Poinsot's Schlüsse nicht genügten, dieselbe Frage in dem Septemberhefte des „Bulletin des sciences mathematiques etc. publié sous la direction de M. le Bon de Férussac" für das Jahr 1825 (Tome 4me dieses Bullet. pag. 141 etc.) neuerdings erörtert und dabei der Hauptsache nach den von Ohm am angeführten Orte betretenen Weg eingeschlagen. Seine Deduction ist mit einigen Abänderungen, welche dieselbe dem oben angewandten Calcul näher bringen, folgende:

Es sey für jeden beliebigen Werth von n und für jeden ganzen positiven oder negativen Werth von r

$$(3)\ Y_r = \cos n(\varphi + r\pi) + ny\cos(n-2)(\varphi + r\pi) + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} y^2 \cos(n-4)(\varphi + r\pi) + \ldots$$

$$Z_r = \sin n(\varphi + r\pi) + ny\sin(n-2)(\varphi + r\pi) + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} y^2 \sin(n-4)(\varphi + r\pi) + \ldots$$

wobei, damit diese Reihen convergiren, y die Einheit nicht übersteigen darf*), so ist wegen

$$\cos(n-2\rho)(\varphi+r\pi) = \cos[(n-2\rho)\varphi + nr\pi]$$
$$= \cos(n-2\rho)\varphi\cos nr\pi - \sin(n-2\rho)\varphi\sin nr\pi$$

und $\sin(n-2\rho)(\varphi+r\pi) = \sin[(n-2\rho)\varphi + nr\pi]$
$$= \sin(n-2\rho)\varphi\cos nr\pi - \cos(n-2\rho)\varphi\sin nr\pi$$

offenbar

$$(4)\ Y_r = Y_o \cos nr\pi - Z_o \sin nr\pi$$
$$Z_r = Z_o \cos nr\pi + Y_o \sin nr\pi$$

Es ist also bloss nöthig, die Reihen

$$(5)\ Y_o = \cos n\varphi + ny\cos(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} y^2\cos(n-4)\varphi + \text{etc.}$$

$$Z_o = \sin n\varphi + ny\sin(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} y^2\sin(n-4)\varphi + \text{etc.}$$

zu summiren, um im Stande zu seyn, die Summen der Reihen Y_r und Z_r anzugeben, und dabei reicht es hin, den Bogen φ zwischen die Grenzen o und π einzuschränken.

Mit Hülfe der Moivre'schen Formel ergibt sich

$$Y_o + Z_o\sqrt{-1} = (\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^n$$

---

*) Die Convergenz dieser Reihen fordert überdiess, dass n zwischen -1 und $+\infty$ liege.

$$+ ny (\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^{n-2}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1 . 2} y^2 (\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^{n-4} + \text{etc.}$$

$$= \left(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi + \frac{y}{\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi}\right)^n$$

$$= [\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi + y(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)]^n$$

$$= [(1+y)\cos\varphi + \sqrt{-1} . (1-y)\sin\varphi]^n$$

Setzt man

$$R = \sqrt{[(1+y)^2 \cos\varphi^2 + (1-y)^2 \sin\varphi^2]}$$

und $\frac{(1+y)\cos\varphi}{R} = \cos\vartheta$, $\frac{(1-y)\sin\varphi}{R} = \sin\vartheta$

wobei R eine reelle Grösse ist, welche stets positiv gedacht werden kann, und ϑ einen reellen Bogen anzeigt, so wird

$$Y_o + Z_o\sqrt{-1} = R^n (\cos\vartheta + \sqrt{-1}\sin\vartheta)^n$$
$$= R^n (\cos\vartheta + \sqrt{-1}\sin\vartheta)$$

folglich, wenn man das Zeichen von $\sqrt{-1}$ ändert und die neue Gleichung mit der ersteren durch Addition und Subtraction verbindet,

(6) $$Y_o = R^n \cos.n\vartheta,\ Z_o = R^n \sin.n\vartheta$$

Hier ist, wie es der Gang der obigen Rechnung mit sich bringt, unter R^n der reelle Werth, welchen diese Potenz immer zulässt, zu verstehen.

Lässt man $\varphi = 0$ seyn, so wird der Bogen ϑ, den Werthen seines Sinus oder Cosinus gemäss ein Vielfaches der Peripherie. Aber dann ist $R = \sqrt{(1+y)^2} = 1+y$ und Y_o verwandelt sich in die Entwickelung von $(1+y)^n$, daher muss $\cos n\vartheta = 1$ seyn; hierzu wird erfordert, dass das erwähnte Vielfache der Peripherie, wenn n ein rationaler Bruch ist, durch den Nenner

desselben getheilt werden könne. Da man aber von ϑ so viele Vielfache der Peripherie wegnehmen kann, als man will, ohne die obigen Werthe von Y_o und Z_o zu ändern, so ist es erlaubt, ϑ für einen Bogen anzunehmen, welcher mit φ zugleich verschwindet. Ist n eine mit der Einheit incommensurable Zahl, so folgt aus $\cos.n\vartheta = 1$ sogleich $\vartheta = o$.

Differenzirt man den Cosinus von ϑ, so findet man

$$\frac{d\cos\vartheta}{d\varphi} = -\frac{(1+y)\ (1-y)^2 \sin\varphi}{R^3}$$

welcher Quotient von $\varphi = o$ bis $\varphi = \pi$ negativ ausfällt; es wächst daher ϑ fortwährend, wenn φ von o angefangen bis π zunimmt; für $\varphi = \pi$ hat man $R = 1 + y$, $\cos\vartheta = -1$, $\vartheta = \pi$, folglich ist für alle Werthe von φ, welche hier in Betrachtung kommen, ohne Zweifel ϑ der kleinste positive Bogen, dem der Cosinus $\frac{(1+y)\cos\varphi}{R}$ gehört. Substituirt man nun die Resultate (6) in die Gleichungen (4), so hat man

(7)
$$Y_r = R^n \cos.n\ (\vartheta + r\pi)$$
$$Z_r = R^n \sin.n\ (\vartheta + \nu\pi)$$

Man kann die veränderliche Grösse y der Einheit so nahe kommen lassen, als man will; dabei nähert sich R ohne Ende der Grenze $+ 2\cos\varphi$ oder $- 2\cos\varphi$, folglich ϑ der Grenze o oder π, je nachdem φ kleiner oder grösser ist als $\frac{\pi}{2}$; die Reihen Y_r und Z_r aber entsprechen den Grenzen

$$\cos n\ (\varphi + r\pi) + n \cos (n-2)(\varphi + r\pi) + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)$$
$$(\varphi + r\pi) + \text{etc.}$$

und

$$\sin n(\varphi+r\pi)+n\sin(n-2)(\varphi+r\pi)+\frac{n(n-1)}{1.2}\sin(n-4)(\varphi+r\pi)+\text{etc.}$$

welche durch U_r und V_r angedeutet werden mögen; es bestehen demnach für alle Werthe des Bogens φ

von o angefangen bis $\frac{\pi}{2}$

die Gleichungen

$$(8)\qquad U_r = (2\cos\varphi)^n \cos nr\pi$$

$$V_r = (2\cos\varphi)^n \sin nr\pi$$

und für alle Werthe des Bogens φ

von $\frac{\pi}{2}$ angefangen bis π

die Gleichungen

$$(9)\qquad U_r = (-2\cos\varphi)^n \cos n(r+1)\pi$$

$$V_r = (-2\cos\varphi)^n \sin n(r+1)\pi$$

durch welche die oben aufgestellte Frage vollständig beantwortet wird. Man hat in derselben unter $(\pm 2\cos\varphi)^n$ immer den reellen Werth zu verstehen, welcher dieser Potenz jederzeit zukömmt.

Setzt man in den Gleichungen (8) $r = o$, so erhält man

$$U_o = (2\cos\varphi)^n;\quad V_o = o$$

Es gilt also die Euler'sche Formel

$$(2\cos\varphi)^n = \cos n\varphi + n\cos(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)\varphi + \ldots$$

auch für jeden nicht ganzen Werth des Exponenten n, welcher die Convergenz der Reihe nicht aufhebt, aber dann darf φ einen Quadranten nicht übersteigen. Diese

Formel bietet übrigens nur den reellen Werth der Potenz $(2\cos\varphi)^n$ dar.

Es ist leicht, aus dem reellen Werthe von $(2\cos\varphi)^n$ alle übrigen Werthe, welche dieser Potenz noch zukommen mögen, zu erzeugen, wenn man den erwähnten Werth mit allen Werthen von 1^n multiplicirt. Wir übergehen daher die aus (8) und (9) sich noch ergebenden allgemeinen Ausdrücke.

Jedoch können wir nicht unterlassen zu bemerken, dass die Poisson'sche Rechnung für $y=1$, wegen des Verschwindens des mit $1-y$ multiplicirten imaginären Bestandtheils, gerade die Form verliert, aus welcher die Endresultate derselben hervorgingen; daher wurden die Ergebnisse dieser Rechnung unter der Annahme $y=1$ nach der Methode der Grenzen erschlossen. Nimmt man an dieser Schlussweise Anstand, welcher hier nicht ganz ungegründet seyn dürfte *), so vermeidet man alles Schwankende, und gewinnt überdiess noch allgemeinere Formeln, wenn man die Reihen

$$(10)\quad Y=\cos\alpha+ny\cos(\alpha+\beta)+\frac{n(n-1)}{1.2}y^2\cos(\alpha+\beta)+\ldots\ldots$$

$$Z=\sin\alpha+ny\sin(\alpha+\beta)+\frac{n(n-1)}{1.2}y^2\sin(\alpha+2\beta)+\ldots.$$

nach der oben gebrauchten Methode summirt.

Man hat in diesem Falle offenbar

$$Y+Z\sqrt{-1}=(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)\Big\{1+ny(\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta)$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}y^2(\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta)^2+\ldots.\Big\}$$

*) Vielleicht sind die Schwierigkeiten, welche Pagani im Jannerhefte des „Bulletin des sciences Mathematiques 1826" vorgibt, an Poissons Entwickelung der Formeln (8) und (9) gefunden zu haben, von dieser Art.

$$= (\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)[1 + y\cos\beta + \sqrt{-1}.y\sin\beta]^n$$

und wenn man $R = \sqrt{[1 + y\cos\beta)^2 + y^2\sin\beta^2]}$
$= [1 + 2y\cos\beta + y^2]$

$$\frac{1 + y\cos\beta}{R} = \cos\vartheta, \quad \frac{y\sin\beta}{R} = \sin\vartheta$$

seyn lässt, wobei man die reelle Grösse R immer positiv, und, weil $1 + y\cos\beta$, (so lange der numerische Werth von y, wie es die Convergenz der vorgelegten Reihen fordert, die Einheit nicht übertrifft) nicht negativ ausfällt, den Bogen ϑ immer zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ annehmen kann.

$$Y + Z\sqrt{-1} = R^n (\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)\,(\cos n(\vartheta + 2\rho\pi) + \sqrt{-1}\sin n(\vartheta - 2\rho\pi))$$

wobei ρ eine bis jetzt noch unbestimmte positive oder negative ganze Zahl bedeutet, also nach gehöriger Sonderung der reellen und imaginären Theile

$$Y = R^n \cos(\alpha + n(\vartheta + 2\rho\pi))$$
$$Z = R^n \sin(\alpha + n(\vartheta + 2\rho\pi))$$

Die unbestimmte ganze Zahl ρ wurde bei der Potenzirung von $\cos\vartheta + \sqrt{-1}\sin\vartheta$ nach der Moivre'schen Formel zu Hülfe genommen, um unter den im Allgemeinen mannigfaltigen Werthen der Potenz $(\cos\vartheta + \sqrt{-1}\sin\vartheta)^n$ die hier tauglichen auszuwählen..

Da Y und Z sich stetig ändern, wenn y von o angefangen bis ± 1 stetig fortschreitet; hingegen $\cos(\alpha + n(\vartheta + 2\rho\pi))$ und $\sin(\alpha + n(\vartheta + 2\rho\pi))$ bei jedem Wechsel von ρ plötzliche oder sprungweise Aenderungen erleiden, so kann ρ von y gar nicht abhängen, und es reicht hin, sin ρ für $y = o$ auszumitteln. Unter dieser Annahme aber ist $Y = \cos\alpha$, $Z = \sin\alpha$, $R = 1$, $\vartheta = o$, also

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2n\rho\pi)$$
$$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2n\rho\pi)$$

daher n_ρ nothwendig eine ganze Zahl. Hierdurch gehen die obigen Gleichungen in

(11) $$Y = R^n \cos(\alpha + n\vartheta)$$
$$Z = R^n \sin(\alpha + n\vartheta)$$ über.

Es sey nun $y = 1$, so wird $R = \sqrt{(2 + 2\cos\beta)} = \pm 2\cos\frac{1}{2}\beta$, wobei man das obere oder das untere Zeichen wählen wird, je nachdem $\cos\frac{1}{2}\beta$ positiv oder negativ ist; nimmt man den kleinsten Bogen zu Hülfe, dessen Cosinus und Sinus mit $\cos\beta$ und $\sin\beta$ übereinstimmen, er heisse β', so fällt β' zwischen o und $\pm\pi$ folglich $\frac{1}{2}\beta'$ zwischen o und $\pm\frac{\pi}{2}$ und man kann

$R = b\cos\frac{1}{2}\beta'$ setzen. Dann wird $\cos\vartheta = \frac{1+\cos\beta'}{2\cos\frac{1}{2}\beta'} = \cos\frac{1}{2}\beta'$

und $\sin\vartheta = \frac{\sin\beta'}{2\cos\frac{1}{2}\beta'} = \sin\frac{1}{2}\beta'$ also $\vartheta = \frac{1}{2}\beta'$ wodurch sich, wenn man 2β statt β also auch $2\beta'$ statt β' schreibt, folgende Formeln ergeben

(12) $$(\pm 2\cos\beta)^n \cos(\alpha + n\beta') = \cos\alpha + n\cos(\alpha + \cos 2\beta) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\cos(a + 4\beta) + \text{etc.}$$
$$(\pm 2\cos\beta)^n \sin(\alpha + n\beta') = \sin\alpha + n\sin(\alpha + 2\ ) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\sin(\alpha + 4\beta) + \text{etc.}$$

aus welchen sich (8) und (9) ohne Schwierigkeit ableiten lassen.

Es erübrigt uns zur vollständigen Darlegung der neuesten diesen Gegenstand betreffenden Arbeiten der Analysten nun noch von der Entwickelung der Potenzen des Cosinus eines Bogens nach der Methode der unbestimmten Coefficienten mit Hülfe der Differenzial-Rechnung zu sprechen, was wir uns für das nächste Heft vorbehalten.

III. Note über die developpablen Flächen von Poisson.

(Nouveau Bulletin des sciences par la société philomatique. 1825. pag. 145 etc.)

Die allgemeine Gleichung der developpablen Flächen ist bekanntlich das Ergebniss der Elimination der veränderlichen Grösse α aus den beiden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} z + x\varphi\alpha + y\psi\alpha + \alpha = 0 \\ x\dfrac{d\varphi\alpha}{d\alpha} + y\dfrac{d\psi\alpha}{d\alpha} + 1 = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

in welchen x, y, z die Coordinaten irgend eines Punctes der Fläche, und $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$ willkührliche Functionen von α anzeigen. *) Wegen der Anwesenheit dieser Functionen kann man die Construction einer developpablen Fläche immer zweien Bedingungen unterwerfen; man kann fordern, dass sie durch zwei gegebene Curven gehe, dass sie zwei gegebene Flächen berühre, oder dass sie durch eine Curve gehe, und eine Fläche berühre, oder endlich, dass sie eine Fläche längs einer darauf vorgezeichneten Curve berühre, wodurch sich eben so viele verschiedene Aufgaben darbieten. Gegenwärtige Note beabsichtigt, diese Probleme auf eine directere und einfachere Weise aufzulösen, als es gewöhnlich zu geschehen pflegt.

Nehmen wir erstlich an, die developpable Fläche gehe durch eine Curve, deren Gleichungen nach verrichteter Auflösung in Bezug auf x und y

---

*) Man sehe hierüber die neuern Lehrbücher der höheren Geometrie, unter welchen wir hier bloss „Littrow's analytische Geometrie" anführen wollen.

$$x = fz,\ y = Fz$$

geben mögen.

Diese Werthe müssen den Gleichungen (1) Genüge leisten, was auch immer z für einen Werth erhalte; man hat also

$$\left.\begin{aligned} z + fz\,.\,\varphi\alpha + Fz\,.\,\psi\alpha + \alpha = 0 \\ fz\,.\,\frac{d\varphi\alpha}{d\alpha} + Fz\,.\,\frac{d\psi\alpha}{d\alpha} + 1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Eliminirt man z mit Hülfe dieser zwei Gleichungen, so ergibt sich eine Differenzial-Gleichung, welche wir durch

$$\Psi\left(\varphi\alpha, \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha}, \psi\alpha, \frac{d\psi\alpha}{d\alpha}, \alpha\right) = 0 \quad (3)$$

vorstellen. Die Functionen $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$ müssen daher entweder durch das gewöhnliche Integral, oder durch die besondere Auflösung derselben mit einander in Verbindung stehen. Da aber die zweite der Gleichungen (2) das Differenzial der ersten ist, in so fern man z als constant behandelt, so gelangt man offenbar sogleich zum Integral der Gleichung (3), wenn man in der ersten der Gleichungen (2) die Veränderliche z durch eine willkürliche Constante c ersetzt, was auf die Gleichung

$$c + fc\,.\,\varphi\alpha + Fc\,.\,\psi\alpha + \alpha = 0$$

führt.

Wollte man jedoch die Functionen $\varphi\alpha$ und $\psi\alpha$ dieser Gleichung gemäss von einander abhängen lassen, so wäre die developpable Fläche an nichts weiter gebunden, als die gegebene Curve in dem Puncte, für welchen $z = c$ ist, zu treffen, nicht aber durch diese Curve hindurch zu gehen (d. h. sie ganz in sich zu enthalten). Es wird daher die Auflösung des vorge-

legten Problems nicht durch das gewöhnliche Integral der Gleichung (3) an die Hand gegeben *), sondern man muss sich zur Erreichung dieses Zweckes an die besondere Auflösung derselben wenden, welche man erhält, wenn man die erste der Gleichungen (2) und ihr Differenzial in Bezug auf z, nämlich die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} z + fz \,.\, \varphi\alpha + Fz \,.\, \psi\alpha + \alpha &= 0 \\ 1 + \frac{dfz}{dz}\varphi\alpha + \frac{dFz}{dz}\psi\alpha &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

durch Elimination von z mit einander verbindet. Bezeichnet man also das Resultat dieser Flimination durch

$$\Psi\,(\varphi\alpha,\ \psi\alpha,\ \alpha) = 0 \quad (5)$$

so müssen die Functionen $\varphi\alpha$ und $\psi\alpha$ dieser letztern Gleichung entsprechen.

Man könnte zu dieser Folgerung unmittelbar durch die Bemerkung gelangen, dass die Gleichungen (2) für alle Werthe von z bestehen, also nebst der ersten derselben auch noch ihr Differenzial in Bezug auf z, in so fern man α als eine Function von z betrachtet, angesetzt werden darf; ferner der Theil dieses Differenzials, welcher durch die Veränderlichkeit von α entsteht, vermög der zweiten der Gleichungen (2) verschwindet, und man somit die Gleichungen (4) vor sich hat, zwischen welchen z zu eliminiren ist. Allein es war zweckmässig, die Differenzial-Gleichung zu

*) Diese Ausschliessung des gewöhnlichen Integrals, dessen Stelle die besondere Auflösung vertritt, hat auch bei der Auflösung des allgemeinen Rectifications-Problems der Curven (Correspondance sur l'Ecole Polytechnique. tom. III. pag. 23), und bei der Ableitung der Gleichung der durch Abwickelung erzeugten Curve aus jener der abgewickelten Statt (Théorie des fonctions pag. 208).

untersuchen, welche durch Elimination von α mittelst der Gleichungen (2) erhalten wird, und ebenfalls die Auflösung der Aufgabe darbieten muss, aber auch auf den Gedanken bringen könnte, dass die Relation zwischen der Function $\varphi\alpha$ und $\psi\alpha$ eine willkürliche Constante zulasse.

Sind die Gleichungen der gegebenen Curve nicht in Bezug auf x und y aufgelösst, wie wir es vorausgesetzt haben, so gelangt man dennoch durch einfache Eliminationen zur Gleichung (5). Es seyen nämlich

$$f'(x, y, z) = 0, \quad F'(x, y, z) = 0 \quad (6)$$

diese beiden Gleichungen, so hat man, wenn man x und y als ungesonderte Functionen (fonctions implicites) von z betrachtet, und in den Gleichungen (4) $x, y, \frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}$ statt der Functionen fz, Fz und ihrer Differenzialien setzt,

$$\left.\begin{aligned} z + x\varphi\alpha + y\psi\alpha + \alpha &= 0 \\ 1 + \frac{dx}{dz}\varphi\alpha + \frac{dy}{dz}\psi\alpha &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Die Werthe von $\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}$ lassen sich ohne Schwierigkeit mittelst der Gleichungen

$$df'(x, y, z) = 0, \quad dF'(x, y, z) = 0$$

durch x, y, z darstellen; substituirt man dieselben in der zweiten der Gleichungen (7), und eliminirt man dann x, y, z aus den Gleichungen (6) und (7), so erhält man die Gleichung (5), um welche es sich hier handelt.

Soll die developpable Fläche durch eine zweite Curve hindurch gehen, deren Gleichungen ebenfalls gegeben sind, so findet man auf dieselbe Art eine

zweite Gleichung, welche der Gleichung (5) ähnlich ist, und durch

$$\Pi\,(\varphi\alpha,\ \psi\alpha,\ \alpha) = 0 \quad (8)$$

bezeichnet werde. Die beiden Functionen $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$ sind also bestimmt, und die Gleichungen, aus welchen jene der developpablen Fläche hervorgeht, von allen willkürlichen Grössen frei. Um die Gleichung der developpablen Fläche selbst zu bilden, substituire man in der zweiten der Gleichungen (1) die durch $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$ und α ausgedrückten Werthe von $\frac{d\varphi\alpha}{d\alpha}$ und $\frac{d\psi\alpha}{d\alpha}$, welche sich aus den Gleichungen

$$d\,.\,\Psi\,(\varphi\alpha,\ \psi\alpha,\ \alpha) = 0,\quad d\,.\,\Pi\,(\varphi\alpha,\ \psi\alpha,\ \alpha) = 0$$

ergeben, dann schaffe man α, $\varphi\alpha$ und $\psi\alpha$ aus den Gleichungen (1), (5) und (8) weg, so erhält man eine Gleichung zwischen x, y, z, welche der durch die vorgezeichneten Curven gelegten developpablen Fläche gehört.

Dasselbe Verfahren dient zur Bestimmung jeder anderen Fläche, welche durch das System zweier mit willkürlichen Functionen versehenen Gleichungen dargestellt wird, deren eine das Differenzial der andern ist, wenn nämlich die Gleichungen eben so vieler Curven gegeben werden, durch welche die Fläche gelegt werden soll, als willkürliche Functionen vorhanden sind.

Nehmen wir nun an, die developpable Fläche, auf welche sich die Gleichungen (1) beziehen, berühre eine Fläche, deren in Bezug auf z aufgelöste Gleichung

$$z = f\,(x,\ y)$$

sey. Für alle Berührungspuncte müssen die Werthe

von z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ beider Flächen übereinstimmen, allein vermög der zweiten der Gleichungen (1) reduciren sich die aus der ersten gefolgerten Werthe von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ auf $-\varphi\alpha$ und $-\psi\alpha$; man hat daher

$$f(x, y) + x\varphi\alpha + y\psi\alpha + \alpha = 0$$

$$\frac{d \,.\, f(x, y)}{dx} + \varphi\alpha = 0, \quad \frac{d \,.\, f(x, y)}{dy} + \psi\alpha = 0:$$

aus welchen Gleichungen man durch Elimination von x, y, z eine Gleichung erzeugt, welche wir durch

$$\psi'(\varphi\alpha, \psi\alpha, \alpha) = 0 \qquad (9)$$

vorstellen.

Wäre die Gleichung der Fläche nicht in Bezug auf z aufgelösst, d. h. hätte sie die Form

$$f(x, y, z) = 0$$

so müsste man z als eine ungesonderte Function von x, y betrachten, und die vorhergehenden drei Gleichungen durch folgende ersetzen:

$$\left.\begin{aligned} z + x\varphi\alpha + y\psi\alpha + \alpha &= 0, \\ \frac{dz}{dx} + \varphi\alpha &= 0, \\ \frac{dz}{dy} + \psi\alpha &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

ferner in dieselben statt $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ die Werthe substituiren, welche sich aus den Gleichungen

$$\frac{d \,.\, f(x, y, z)}{dx} = 0, \quad \frac{d \,.\, f(x, y, z)}{dy} = 0$$

ergeben, und endlich die Gleichung (9) bilden, indem man x, y, z mit Hülfe der obigen drei Gleichungen aus jener der gegebenen Fläche wegschafft.

Soll die developpable Fläche eine zweite gegebene Fläche berühren, so bilde man auf dieselbe Weise eine zweite Gleichung wie (9), welche durch

$$\pi' (\varphi\alpha, \psi\alpha, \alpha) = 0 \quad (11)$$

angezeigt werde; aus den Gleichungen (9) und (11) folgt, wie in der ersten Aufgabe, die Gleichung der verlangten Fläche: sie zerfällt in zwei Factoren, weil es im Allgemeinen zwei verschiedene developpable Flächen gibt, welche die vorhandenen zwei Flächen berühren.

Will man, dass die developpable Fläche eine gegebene Fläche berühre, und durch eine gegebene Curve gehe, so müssen die Functionen $\varphi\alpha$ und $\psi\alpha$ durch die Gleichungen (5) und (9) bestimmt werden, wovon die erste auf die Curve und die zweite auf die Fläche sich bezieht.

Verlangt man endlich die Gleichung einer developpablen Fläche, welche eine gegebene Fläche in einer darauf vorgezeicheten Curve berührt, so sey wie oben

$$f (x, y, z) = 0$$

die Gleichung der berührten Fläche, und

$$F (x, y, z) = 0$$

die Gleichung einer zweiten Fläche, welche die erstere in der erwähnten Curve schneidet. Diese zwei Gleichungen müssen mit den Gleichungen (10) für alle Puncte dieser Curve zugleich bestehen, indem man, wie oben erinnert wurde, die Werthe der in (10) erscheinenden Grössen $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ aus den Gleichungen

$$\frac{d \,.\, f (x, y, z)}{dx} = 0, \quad \frac{d \,.\, f (x, y, z)}{dy} = 0$$

ableitet. Eliminirt man daher x, y, z aus den genannten Gleichungen, so erhält man zwei Gleichungen zwischen $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$ und α, mittelst welcher die zur Bildung der Gleichung der developpablen Fläche dienenden Functionen $\varphi\alpha$ und $\psi\alpha$ bestimmt werden können.

IV. Auflösung eines Problems in Betreff des Erdmagnetismus von Poisson.

(Annales de Chimie et de Physique. Novemb. 1825 und Connaissance des tems pour 1828.)

Die magnetische Kraft der Erde hat weder an jedem Puncte ihrer Oberfläche dieselbe Richtung noch dieselbe Stärke. In demselben Orte ist die Richtung dieser Kraft täglichen und jährlichen Ungleichheiten und anderen langsamer erfolgenden und weiter sich erstreckenden Variationen unterworfen. Diese Aenderungen der Richtung, deren Gesetze und Ursache wir noch nicht kennen, zeigen sich an einer sogenannten Neigungs- und Abweichungsnadel, die in jedem Orte und zu jeder Zeit nach der Richtung der magnetischen Kraft der Erde oder ihres horizontal wirkenden Theiles folgen muss, wie immer ihre Natur und der Grad ihres Magnetismus beschaffen seyn mag. Die Intensität dieser Kraft misst man bekanntlich durch die Schwingungen einer Magnetnadel um die Lage ihres Gleichgewichtes; da aber ihre Dauer sowohl von der magnetischen Kraft der Erde zur Zeit der Beobachtung als auch vom magnetischen Zustand der Magnetnadel abhängt, so soll man immer dieselbe Magnet-

nadel und zwar bei demselben Wärmegrade anwenden, weil die magnetische Kraft derselben abnimmt, wenn die Temperatur wächst und umgekehrt. Man kann desshalb dieses Mittel nicht anwenden, um die Aenderungen der Intensität des Erdmagnetismus zu erforschen, welche erst nach Verlauf einer langen Zeit bemerkbar werden und die man desshalb seculäre Variationen nennen könnte, weil man nicht dieselbe Magnetnadel nach so langer Zeit wieder zu finden hoffen darf, deren man sich früher bediente, und fände man sie auch, so wäre es sehr zweifelhaft, ob sie ihren Magnetismus unverändert beibehalten. Die Schwierigkeit würde nicht minder werden, wenn man eine Stahlnadel construiren wollte, die mit einer anderen völlig identisch ist, sowohl in Betreff ihrer chemischen Beschaffenheit als des Verfahrens beim Magnetisiren. Und doch wäre es interessant, unseren Nachkommen eine sichere Methode zu hinterlassen, wodurch sie den magnetischen Zustand der Erde zu ihrer Zeit mit dem in unseren Tagen vergleichen und daraus abnehmen könnten, ob die Wirkung der Erde auf eine Boussole stärker oder schwächer geworden ist. Zu diesem Zwecke schlage ich folgendes Verfahren vor:

Man hänge eine bis zur Sättigung oder auf irgend eine andere Weise magnetisirte Nadel in ihrem Schwerpuncte frei auf, so, dass sie im Augenblicke und im Orte der Beobachtung die Richtung der magnetischen Kraft der Erde annimmt, lasse sie nach beiden Seiten des magnetischen Meridians schwingen und zähle die Anzahl der Schwingungen, welche sie in einer gegebenen Zeit macht, um daraus die Dauer einer Schwin-

gung abnehmen zu können. Dasselbe thue man auch mit einer zweiten Magnetnadel, die auf ähnliche Art aufgehängt ist. Nun bringe man beide Magnetnadeln in eine solche Lage, dass ihre Schwerpuncte in einer mit der Richtung des Erdmagnetismus parallelen geraden Linie liegen; die Längen beider Nadeln werden sich vermög des Erdmagnetismus und ihrer gegenseitigen Einwirkuug nach dieser Parallelen richten. Dann versetze man abwechselnd eine der beiden Magnetnadeln ohne die andere in Schwingungen nach beiden Seiten des magnetischen Meridians, die durch die vereinigte Wirkung des Erdmagnetismus und der ruhenden Nadel erfolgen, und beobachte wieder die Dauer einer solchen Schwingung. Misst man hierauf die Entfernung ihrer Schwerpuncte und berechnet ihre Trägheitsmomente, in Beziehung auf ihre respectiven Drehungsaxen, so erhält man sieben Grössen nämlich: die Entfernung beider Schwerpuncte, die zwei Trägheitsmomente, und die Dauer von vier verschiedenen Schwingungen. Es gibt aber eine Function zwischen diesen 7 Grössen, deren Werth von den beiden, beim Versuch gebrauchten Magnetnadeln unabhängig und nur von der Intensität des Erdmagnetismus abhängig ist. Man erhält freilich nur einen angenäherten Werth von dieser Function, jedoch kann man die Annäherung so weit treiben als man will, und so immer den Ausdruck mit hinreichenden Schärfe finden, welcher der Intensität des Erdmagnetismus proportionirt ist.

Es sey nun μdx ein Element des freien magnetischen Fluidums von der Dicke dx, das in einem auf der Länge einer Magnetnadel A senkrechten Querschnitt enthalten ist, der in der Entfernung x vom

Schwerpuncte gedacht wird, und zwar gegen den Nordpol für positive, gegen den Südpol für negative Werthe von μ. Es ändert sich zwar der Werth von μ mit dem von x, man braucht aber das Gesetz, nach welchem dieses geschieht, nicht zu kennen, und es ist hinreichend zu wissen, dass $\int \mu dx$, nach der ganzen Länge der Magnetnadel genommen, Null seyn muss, weil die beiden magnetischen Flüssigkeiten, welche mit entgegengesetzten Zeichen bezeichnet werden, in einem Magnete in gleicher Menge vorhanden sind.

Heisst nun φ das Mass der magnetischen Kraft der Erde, so ist die Kraft, wodurch das Fluidum μdx des Magnets A die Richtung bekommt $= \varphi\mu dx$. Bringt man ihn um den Winkel α aus der Lage seines Gleichgewichtes, so ist das Moment der Kraft, wodurch er wieder in dieselbe zurückzukehren sucht, auf seinen Schwerpunct bezogen, in Betreff des Elementes μdx das Product aus $\varphi\mu dx$ in $x \sin\alpha$, d. i. $\varphi\mu x \sin\alpha dx$, und das Moment aller Kräfte, die den Magnet in Schwingungen versetzen $= \varphi \sin\alpha \int \mu x dx$, wobei das Integrale nach der ganzen Länge von A zu nehmen ist. Ist α sehr klein, und t die Zeit einer Schwingung, so hat man nach der Theorie des Pendels

$$t = \pi \sqrt{\frac{m}{\varphi h}} \text{ oder } \varphi h = \frac{\pi^2 m}{t^2} \quad (a)$$

wenn π das Verhältniss der Peripherie eines Kreises zu seinem Durchmesser, m das Trägheitsmoment von A in Bezug auf die durch den Schwerpunct gehende Drehungsaxe ist, und $\int \mu x dx = h$ gesetzt wird.

Haben für einen zweiten Magnet B die Grössen

k, m′, t′ dieselbe Bedeutung, wie im ersten h, m, t, so wird auch

$$\varphi k = \frac{\pi^2 m'}{t'^2} \quad \text{(b)}$$

Bringt man A und B in eine Lage, wo ihre Schwerpuncte in eine mit der Resultante des Erdmagnetismus parallele Linie zu liegen kommen, und von einander um die Grösse r entfernt sind, so werden sie durch den Erdmagnetismus und durch ihre gegenseitige Einwirkung in dieser Linie im Gleichgewichte erhalten und der Nordpol der unteren Magnetnadel wird dem Südpol der oberen zugewendet seyn. Ist nun $\mu' dx'$ dasselbe für B, was μdx für A bedeutete, so haben die beiden Querschnitte, auf welche sich diese zwei Ausdrücke beziehen, die Entfernung $r + x - x'$, und weil die ihnen inhärirenden magnetischen Kräfte abnehmen, wie das Quadrat ihrer Entfernung wächst, so bekommt man für ihre gegenseitige Wirkung den Ausdruck

$$\frac{f \mu \mu' dx dx'}{(r + x - x')^2},$$

wo f eine Constante ist, welche die Wirkung zweier freier Theile der magnetischen Flüssigkeit, jedes als Einheit angenommen, in der Entfernung = 1 ausdrückt. Bringt man A um den sehr kleinen Winkel α aus der Lage des Gleichgewichtes, so ändert sich diese Wirkung nicht merklich, und ihr Moment in Bezug auf den Schwerpunct von A ist obige Grösse, multiplicirt mit $x \sin \alpha$, und daher die Totalsumme der Momente der Kräfte, die von allen Puncten von B ausgehen, und auf alle Puncte von A wirken gleich

$$f \sin\alpha \iint \frac{\mu \mu' dx dx'}{(r + x - x')^2}.$$

wo die beiden Integrale nach der ganzen Länge von A und B zu nehmen sind. Weil die Schwingungen von A in dieser Lage durch diese Kraft, vereint mit der magnetischen Kraft der Erde hervorgebracht werden, deren Moment $\varphi h \sin \alpha$ ist, so erhält man, wenn man die Dauer einer Schwingung δ heisst,

$$\delta = \pi \sqrt{\frac{m}{\varphi h + fq}} \text{ und } \varphi h + fq = \frac{\pi^2 m}{\delta^2}$$

wo der Kürze halber

$$\iint \frac{\mu \mu' dx dx'}{(r + x - x')^2} = q$$

gesetzt worden ist. Zieht man von dieser Gleichung die Gleichung (a) ab, so wird

$$fq = \pi^2 m \left(\frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{t^2} \right) \quad (c)$$

Lässt man eben so B unter der Wirkung des Erdmagnetismus und der zwei Magnete auf einander schwingen, nennt δ' die Dauer einer solchen Schwingung, und setzt

$$\iint \frac{\mu \mu' dx dx'}{(r + x' - x)^2} = q'$$

so bekommt man durch ein dem vorigen gleiches Verfahren

$$fq' = \pi^2 m' \left(\frac{1}{\delta'^2} - \frac{1}{t'^2} \right)$$

Entwickelt man beide Doppelintegrale nach den negativen Potenzen von r, so ist das erste Glied jeder dieser Entwickelungen gleich Null, weil

$$\int \mu dx = 0, \ \int \mu' dx' = 0,$$

ist. Setzt man weiter voraus, dass der Magnetismus jedes Magnetes symmetrisch um den Schwerpunct vertheilt ist, so sind auch die Ausdrücke

$\int\mu x^2 dx$, $\int\mu' x'^2 dx'$, $\int\mu x^4 dx$, $\int\mu' x'^4 dx'$ etc.
gleich Null, und es verschwinden in der Entwickelung des Integrales alle Glieder, welche eine gerade Potenz von r im Nenner haben. Setzt man nun, den früheren Bedeutungen von h und k analog

$$\int\mu x^3 dx = h', \quad \int\mu x^5 dx = h'' \text{ etc.}$$

$$\int\mu x'^3 dx' = k', \quad \int\mu x'^5 dx' = k'' \text{ etc.}$$

so findet man

$$q = \frac{hk}{r^3} + \frac{4(3h'k + hk')}{r^5} + \frac{6(5h''k + 10h'k' + hk'')}{r^7} + \ldots$$

$$q' = \frac{hk}{r^3} + \frac{4(3hk' + h'k')}{r^3} + \frac{6(5hk'' + 10h'k' + h''k)}{r^7} + \ldots$$

Diese Reihen convergiren desto mehr, je kleiner die Länge der beiden Magnetnadeln gegen die Entfernung ihrer Schwerpuncte r ist. Setzt man die gefundenen Werthe von q und q' in die Gleichungen (c) und (d), so wird

$$\left.\begin{aligned} fhk + \frac{fa}{r^2} + \frac{fb}{r^2} + \text{etc.} &= \frac{m\pi^2 r^3 (t^2 - \delta^2)}{2t^2\delta^2} \\ fhk + \frac{fa'}{r^2} + \frac{fb'}{r^4} + \text{etc.} &= \frac{m\pi^2 r'^3 (t'^2 - \delta^2}{2t'^2\delta'^2} \end{aligned}\right\} (e)$$

wo der Kürze halber gesetzt wurde

$3h'k + hk' = \frac{1}{2}a$, $5h''k + 10h'k' + hk'' = \frac{1}{3}b$ .....

$3hk' + hk' = \frac{1}{2}a'$, $5hk'' + 10h'q' + h''k = \frac{1}{3}b'$ .....

Ist r so gross, dass man die durch r^2, r^4 etc. getheilten Glieder vernachlässigen kann, so bekommt man

$$\frac{m(t^2 - \delta^2)}{t^2\delta^2} = \frac{m'(t'^2 - \delta'^2)}{t'^2\delta'^2}$$

und durch Elimination der Grössen h und k aus den Gleichungen (a) und (b) folgende symmetrische Formel

$$\varphi^2 = \frac{2\pi^2 f\delta\delta'\sqrt{mm'}}{r^3 tt'\sqrt{((t^2-\delta^2)(t'^2-\delta'^2))}}$$

die zur Bestimmung der Grösse φ wohl einfach genug wäre, aber in der Ausübung zu wenig Schärfe gewährt; denn entfernt man die zwei Magnete von einander, so vermindert man ihren gegenseitigen Einfluss auf einander, mithin auch die Differenz $t - \delta$ und $t' - \delta'$, und die unvermeidlichen Beobachtungsfehler können einen merklichen Theil dieser Differenz ausmachen. Man muss daher die beiden Magnete einander desto mehr nähern, je schwächer sie sind, und um so viel, dass die Differenzen $t - \delta$ und $t' - \delta'$ die unvermeidlichen Beobachtungsfehler stark übertreffen. Dann muss man in den Gleichungen (e) eine gewisse Anzahl ihrer ersten Glieder beibehalten, und um die Werthe von fa, fa', fb, fb' etc. bestimmen zu können, den Versuch mit beiden Magneten bei verschiedenen Werthen von r wiederhohlen, wobei man für δ und δ' aber nicht für m, m', t und t' verschiedene Werthe erhält. Da jeder Versuch 2 Gleichungen (e) gibt, so kann man hieraus alle unbekannten Grössen mit Ausnahme von fhk eliminiren.

Gesetzt man habe auf diese Weise gefunden

$$fhk = \rho^2$$

wo ρ eine bekannte Grösse ist. Multiplicirt man die Gleichungen (a) und (b) Glied für Glied mit einander, und substituirt für hk den Werth $\frac{\rho^2}{f}$, so bekommt man

$$\varphi^2 = Ff$$

wenn man $\frac{\pi^2\sqrt{mm'}}{tt'\rho} = F$ setzt, wo also auch F eine

bekannte Grösse ist. Der Werth von φ hängt also von F und f allein ab. Allein letztere Grösse ist in allen Substanzen, die des Magnetismus fähig sind, bei allen Temperaturen von derselben Grösse. Es werden daher die Werthe von F immer von derselben Grösse seyn, wenn sich φ nicht ändert, hingegen grösser oder kleiner, wenn φ zu- oder abgenommen hat, es mögen die Magnete, mit denen man die Versuche angestellt hat, aus Stahl, Eisen, Nikel etc. bestehen. Man darf nur darauf sehen, dass die Magnete nicht durch ihre gegenseitige Einwirkung die Vertheilung der magnetischen Kraft in ihnen abändern und darf daher nie Magnete aus weichem Eisen wählen.

Um den Werth von F leicht in Zahlen ausdrücken zu können, so seyen p und p′ die Gewichte der beiden Magnete A und B, λ und λ' Linien, deren Länge von der Gestalt und von den Dimensionen derselben abhängt und immer leicht zu berechnen ist; ferner sey l die Länge des einfachen Pendels, das in einer Zeiteinheit im Beobachtungsorte eine Schwingung macht; so hat man

$$m = \frac{p\lambda^2}{\pi^2 l}, \quad m' = \frac{p'\lambda'^2}{\pi^2 l'}$$

Man setze die Werthe statt m und m′ in die zweiten Glieder der Gleichungen (e) und im Ausdruck von F, der dann in folgenden übergeht

$$F = \frac{\lambda\lambda'\sqrt{pp'}}{tt'^2\sqrt{ll'}},$$

so braucht man nur eine beliebige Einheit des Gewichtes, der Länge und der Zeit anzunehmen, um zum Zwecke zu gelangen. Das Resultat des bisher aus einander gesetzten Verfahrens wird nun darin beste-

hen, dass man sagen kann, in einer bestimmten Zeit und in einem gewissen Orte hat F einen von den Magneten A und B unabhängigen numerischen Werth. Wiederhohlt man den Versuch z. B. nach einem Jahrhundert, so wird man genau angeben können, ob sich die magnetische Kraft der Erde geändert hat oder nicht, je nachdem F einen andern oder denselben Werth hat.

Es ist nothwendig für t, t′, δ, δ' ihre nach der Grösse des Ausschlagwinkels corrigirten Werthe anzuwenden, wie dieses bei anderen Pendeln geschieht. Ferner, da der Ausschlagwinkel nicht unendlich klein ist, so wird auch die Wirkung eines Elementes von einem Magnet auf jedes Element des anderen nicht constant seyn, wie bisher vorausgesetzt wurde. Der genaue Ausdruck des Momentes der Wirkung von B auf A heisst daher

$$f \sin a \iint \frac{\mu\mu' dx dx'}{(r+x-x')^2+x^2 \sin\alpha^2}$$

für den Augenblick, wo sich A um den Winkel α von seiner ursprünglichen Lage entfernt hat; einen ähnlichen Ausdruck bekommt man auch für die Wirkung von A auf B.

Entwickelt man diese Ausdrücke nach den Potenzen von $\sin\alpha$, und berechnet darnach die Dauer δ und δ' der Schwingungen, so findet man, dass die ersten Glieder der Gleichungen (e) mit neuen, durch r^2, r^4 etc. dividirten Theilen vermehrt erscheinen, deren Coefficienten zu den Unbekannten fa, fa′, fb, fb′ etc. kommen. Aber da diese Unbekannten eliminirt werden müssen; so ändert sich dadurch der Werth von

fhk nicht, der nach den beobachteten Werthen von δ, δ' bestimmt wurde.

Die magnetische Kraft der Erde φ ist gleich der Kraft f, die allen magnetischen Substanzen zukömmt, multiplicirt durch einen Factor φ', der von der Vertheilung des Magnetismus im Erdsphäroide abhängt; sie kann sich daher durch eine Aenderung der Anordnung des Magnetismus und durch eine mit der Zeit erfolgende Variation des Aufeinanderwirkens der Theile des magnetischen Fluidums ändern; aber in beiden Fällen wird dieses durch den Werth von F angezeigt, den besonderen Fall ausgenommen, wenn eine dieser Grössen wächst, wie das Quadrat der anderen abnimmt. Denn setzt man $f\varphi'$ statt φ in die Gleichung (f), und theilt beide Glieder durch f, so bekommt man

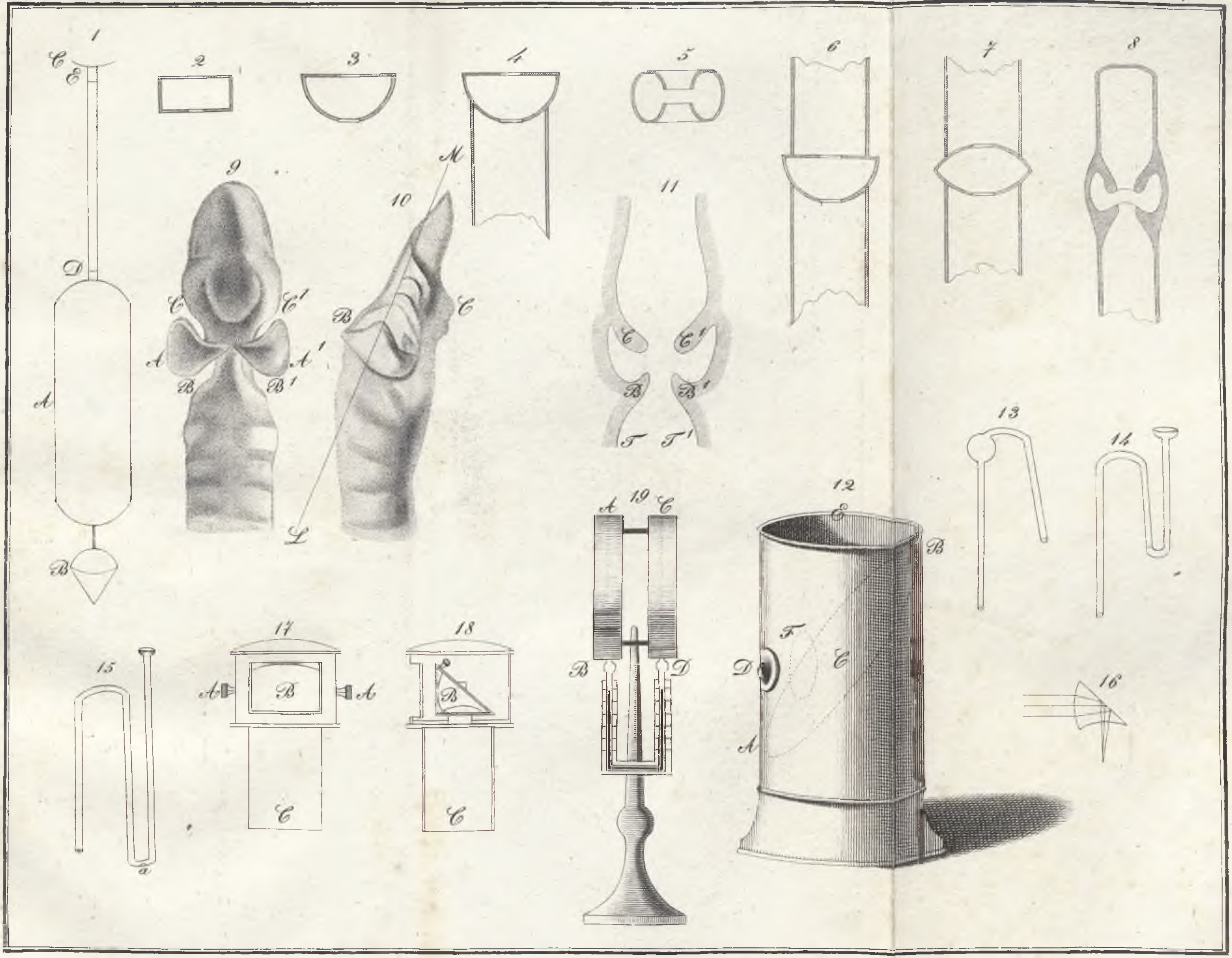
$$f\varphi'^2 = F.$$

So sorgfältig man auch immer beim Magnetisiren von A und B zu Werke gehen mag, so wird doch eine kleine Abweichung von der symmetrischen Vertheilung des Magnetismus zu beiden Seiten des Schwerpunctes Statt finden.

Desshalb sollte man in die ersten Glieder der Gleichungen (e) mit r, r^3 etc. dividirte Glieder einführen, deren Coefficienten aber so wie die der mit geraden Potenzen von r getheilten eliminirt werden müssen. Dieses hat also auf den Werth von fhk, der den beobachteten Grössen δ und δ' entspricht, keinen Einfluss, und diese Grössen hängen von r auf dieselbe Art ab, der Magnetismus mag symmetrisch um den Schwerpunct angeordnet seyn oder nicht.

Es ist klar, dass man statt frei hängender Magnete andere, z. B. horizontal schwebende, in demselben

magnetischen Meridiane befindliche, und deren eine in der Verlängerung der anderen liegt, anwenden kann, dann ist aber statt φ der horizontal wirkende Theil des Erdmagnetismus zu setzen, welcher gleich φ cosin ε ist, wenn ε die magnetische Neigung im Beobachtungsorte zur Zeit der Beobachtung vorstellt. (B.)


1
C
E
D
A
B
2
3
4
5
6
7
8
9
C
C'
A
A'
B
B'
10
M
B
C
L
11
C
C'
B
B'
T
T'
12
E
B
F
D
C
A
13
14
15
a
16
17
A
B
A
C
18
B
C
19
A
C
B
D